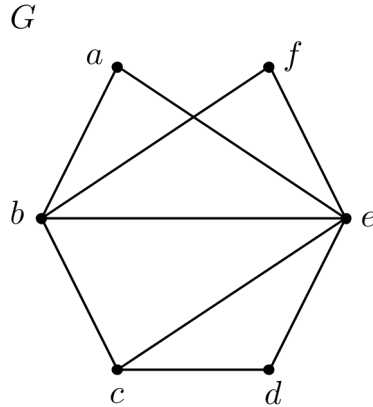


Teorija grafov

Študijsko leto: 2021/2022

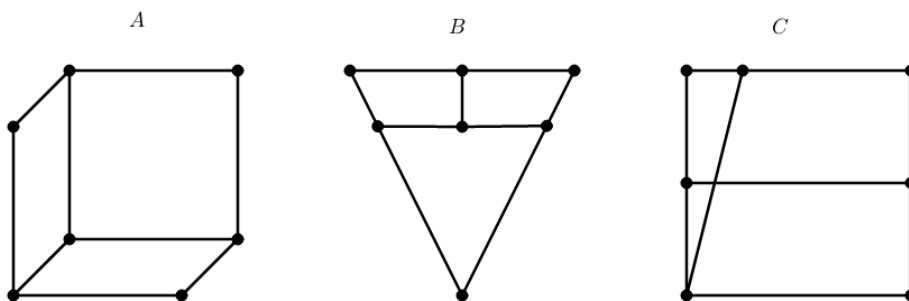
Vaje 1: Ponovitev, 1.del

- Narišite primer grafa G , ki ima naslednje lastnosti.
 - $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$, $N(x) = \{y, u, v\}$, $N(z) = \{u, v\}$, $\deg(u) = \deg(v) = 2$. Določite $\Delta(G)$ in $\delta(G)$.
 - Graf G ima pet vozlišč stopenj 1, 3, 3, 4, 4.
 - Graf G ima pet vozlišč, šest povezav, največjo stopnjo 3 in najmanjšo stopnjo 2.
- Naj bo G_n graf, za katerega je $V(G_n) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ in vozlišči $a, b \in V(G_n)$ sta povezani natanko tedaj, ko $3|ab$.
 - Narišite grafe G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 in G_6 .
 - Za grafe $G_n, n \in \mathbb{N}$, določite $\Delta(G_n)$ in $\delta(G_n)$.
- Dokažite, da je zaporedje $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n-1, n-1, n, n$ zaporedje stopenj vozlišč grafa za vsako naravno število n .
- Dokažite, da ima graf G , $|V(G)| \geq 2$, vsaj dve vozlišči enake stopnje.
- Dokažite, da povezan r -regularen graf, kjer je r sodo število, nima mosta.
- Naj bo G k -regularen dvodelen graf ($k > 0$) z dvodelnim razbitjem $V(G) = X + Y$. Dokažite, da velja: $|X| = |Y|$.
- Iz standardne 8×8 šahovnice odstranimo zgornji levi kvadrat in spodnji desni kvadrat. Dokažite, da dobljene deske ne moremo pokriti z 1×2 dominami tako, da se domine med seboj ne prekrivajo.
- Drevo T ima 10 vozlišč stopnje 4, vsa ostala vozlišča pa so stopnje 1. Določite število vozlišč in število povezav drevesa T .
- Naj bo \mathcal{T} družina dreves, ki imajo vsa notranja vozlišča stopnje 3. Dokažite, da imajo drevesa družine \mathcal{T} število listov za 2 večje od števila notranjih vozlišč.
- Naj bo $F = (V, E)$ gozd s c komponentami. Dokažite: $|E(F)| = |V(F)| - c$.

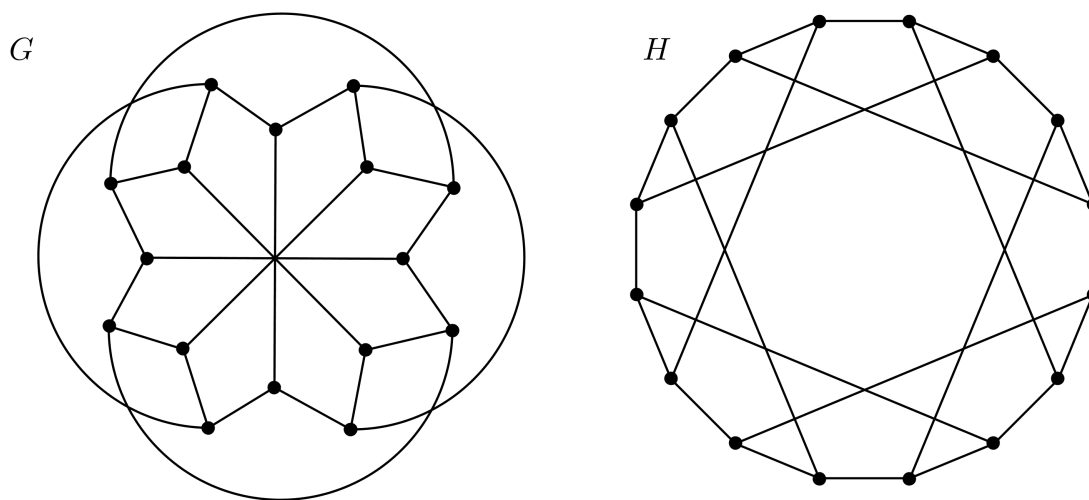


Slika 1: Graf G iz naloge 13

11. Naj bo T drevo, ki ni poln graf. Za vsak $i \in \{1, 2, \dots, \Delta(T)\}$ označimo z v_i število vozlišč drevesa T , ki imajo stopnjo i . Dokažite, da drevo T premore natanko $v_3 + 2v_4 + \dots + (\Delta(T) - 2) \cdot v_{\Delta(T)} + 2$ listov.
12. Naj bo \mathcal{U} poljubna končna množica in \mathcal{D} neka neprazna družina njenih podmnožic. Definirajmo graf G takole: $V(G) = \mathcal{D}$ in $E(G) = \{\mathcal{A}\mathcal{B}; \mathcal{A} \neq \mathcal{B}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$. Graf G imenujemo *presečni graf družine* \mathcal{D} .
Katerim znanim grafom sta izomorfna presečna grafa družine \mathcal{D} , kjer je:
 - (a) $\mathcal{D} = \{\{i, i + 1\}; i = 1, 2, \dots, n - 1\}$;
 - (b) \mathcal{D} družina vseh $(n - 1)$ -elementarnih podmnožic n -elementarne množice.
13. Na Sliki 1 je narisana graf G .
 - (a) Narišite primer podgrafa J grafa G , ki je induciran le z vozlišči iz množice $\{a, b, e, f\}$.
 - (b) Narišite primer vpetega podgrafa K grafa G , ki ima 6 povezav in $\delta(K) = 1$.
14. Obravnavajte vse pare grafov, prikazanih na Sliki 2. Ugotovite, kateri so izomorfni.
15. Ali sta grafa G in H , prikazana na Sliki 3, izomorfna? Utemeljite.
16. Naj bo G graf, ki je izomorfen svojemu komplementu. Dokažite, da je $|V(G)| = 4k$ ali $|V(G)| = 4k + 1$, kjer je k neko naravno število.



Slika 2: Grafi iz naloge 14



Slika 3: Grafa G in H iz naloge 15