

## Vaje 7: Dominantne množice

1. Dan je graf  $G$ , prikazan na spodnji sliki. Določite  $\gamma(G)$  in  $\Gamma(G)$ .



2. Dokažite, da je  $\gamma(\bar{G}) \leq 2$  za vsak graf  $G$  z diametrom vsaj 3.
3. Naj bo  $G$  povezan graf z diametrom 2. Dokažite, da je  $\gamma(G) \leq \delta(G)$ .
4. (a) Dokažite, da za poljuben graf  $G$  velja:  $\frac{1+\text{diam}(G)}{3} \leq \gamma(G)$ .  
(b) Naj bo  $d$  največje tako število, da obstaja  $d$  paroma disjunktih podmnožic množice vozlišč grafa  $G$ , za katere velja, da so dominantne množice grafa  $G$ . Dokažite:  $d \leq \delta(G) + 1$ .
5. Dokažite:  $\gamma(G \square H) \leq \min\{\gamma(G) \cdot |V(H)|, \gamma(H) \cdot |V(G)|\}$ .
6. Množico  $D_k \subseteq V(G)$ ,  $k \geq 1$ , imenujemo  $k$ -dominantna množica grafa  $G$ , če ima vsak  $x \in V(G) \setminus D_k$  vsaj  $k$  sosedov v množici  $D_k$ . Z  $\gamma_k$  označimo moč najmanjše  $k$ -dominantne množice grafa  $G$ .
- (a) Utemeljite, da za vsak graf  $G$  velja naslednja neenakost:  $\gamma_k(G) \geq \gamma(G)$ .
- (b) Navedite primer neskončne družine grafov  $G_i$  z lastnostjo  $\gamma_2(G_i) = \gamma(G_i)$  in primer neskončne družine grafov  $H_i$ , za katere bo veljalo  $\gamma_2(H_i) > \gamma(H_i)$ .
- (c) Dokažite, da za vsak povezan graf  $G$  velja:  $\gamma_3(G) \geq \gamma(G) + 1$ .