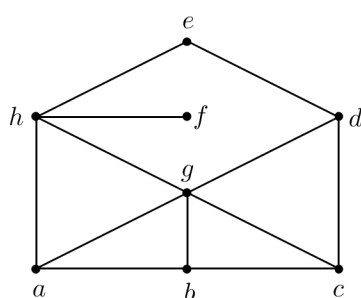


## Vaje 5: Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

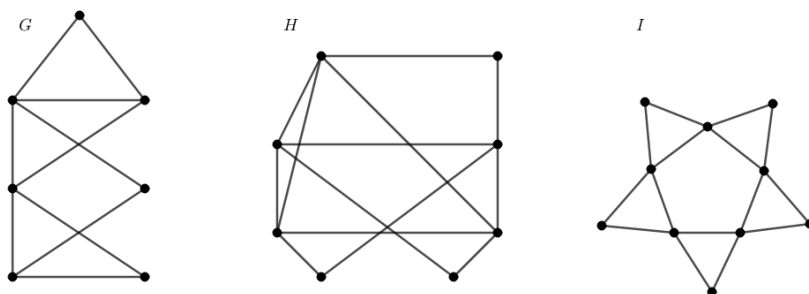
1. Na sliki 1 je prikazan graf  $G$ .

- Navedite vsaj tri primere poti v grafu  $G$ , ki potekajo od vozlišča  $a$  do vozlišča  $e$ .
- Navedite primer prehoda v grafu  $G$  od vozlišča  $a$  do vozlišča  $d$ , ki ne poteka preko povezave  $gd$ .
- Navedite primer obhoda, ki se začne in konča v vozlišču  $b$  in ne vključuje povezave  $ab$ .



Slika 1: Graf  $G$  iz naloge 1

2. Kateri izmed grafov, prikazanih na sliki 2, so Eulerjevi? Utemeljite.



Slika 2: Grafi iz naloge 2

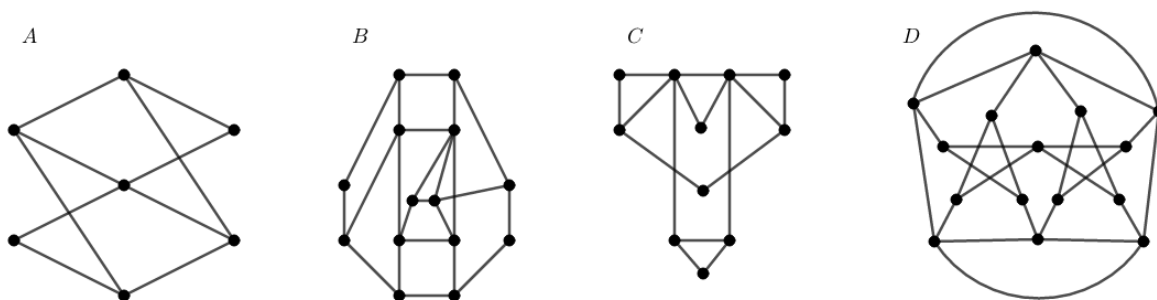
- Naj bo  $G_n$  graf, za katerega je  $V(G_n) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  in vozlišči  $a, b \in V(G_n)$ ,  $a < b$ , sta povezani natanko tedaj, ko je  $a \leq 4$ . Za katera naravna števila  $n \geq 3$  so ti grafi Eulerjevi?

4. Naj bo  $G$  poljuben graf z  $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Iz grafa  $G$  tvorimo graf  $G^*$  z  $V(G^*) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tako, da je  $E(G) \subseteq E(G^*)$  in vsako vozlišče  $v_i$  je povezano z vsemi vozlišči iz  $N_G(u_i)$ . Povedano drugače, graf  $G^*$  dobimo iz grafa  $G$  tako, da grafu  $G$  dodamo vozlišča  $v_1, v_2, \dots, v_n$  in vsako vozlišče  $v_i$  povežemo z vsemi sosedi vozlišča  $u_i$ .

(a) Narišite graf  $C_5^*$ .

(b) Ali velja naslednja trditev? Dokažite ali navedite protiprimer. Če je graf  $G$  Eulerjev, potem je tudi graf  $G^*$  Eulerjev.

5. Kateri izmed grafov, prikazanih na sliki 3, so Hamiltonovi?



Slika 3: Grafi iz naloge 5

6. Naj bo  $G$  dvodelni Hamiltonov graf z dvodelnim razbitjem  $V(G) = A \cup B$ . Dokažite, da je  $|A| = |B|$ .

7. Dokažite, da Petersenov graf ni Hamiltonov.

8. Naj bo  $G$  povezan graf ter  $u, v$  vozlišči tega grafa s stopnjama  $\deg(u) = \deg(v) = |V(G)| - 1$ .

(a) Ali velja naslednja trditev? Utemeljite. Če je graf, ki ga inducira množica vozlišč  $V(G) - \{u, v\}$  Eulerjev, potem je tudi  $G$  Eulerjev.

(b) Ali velja naslednja trditev? Utemeljite. Če je graf, ki ga inducira množica vozlišč  $V(G) - \{u, v\}$  Hamiltonov, potem je tudi  $G$  Hamiltonov.

9. Za vsako naravno število  $n$ ,  $n \geq 3$ , ugotovite, ali obstaja graf z  $n$  vozlišči, ki je Eulerjev, a ni Hamiltonov. V primerih, da graf obstaja, ga narišite, sicer utemeljite, da graf ne obstaja.