Vaje 9: Barvno kritični grafi

1. Naj bo G spoj grafov C_5 in K_s. Določite $\chi(G)$. Ali je G barvno kritičen graf?
2. Dokažite, da za vsak k-kritičen graf velja: $\delta(G) \geq k - 1$.
3. Naj bo G k-kritičen graf ter u in v nesosednji vozlišči tega grafa. Dokažite, da obstaja k-barvanje grafa G, v katerem vozlišči u in v prejmeta enaki barvi, in tudi takšno k-barvanje grafa G, v katerem vozlišči u in v prejmeta različni barvi.
4. Naj bo G k-kritičen graf. Dokažite, da veljata naslednji dve trditvi.
   (a) Za vsako vozlišče v grafa G obstaja dobro k-barvanje grafa G, v katerem ima en barvni razred le vozlišče v, v okolici vozlišča v ($N(v)$) pa se pojavi vseh ostalih $k - 1$ barv.
   (b) Za vsako povezavo $e = xy$ grafa G velja, da vsako dobro $k - 1$ barvanje grafa $G - e$ vozliščema x in y priredi enaki barvi.
5. Za vsak $n \geq 4$, $n \neq 5$, konstruirajte 4-kritičen graf na n vozliščih.
6. Naj bo $G_{n,2k}$ Harary-jev graf, $n \geq k(k+1)$ in $(k+1)|n$.
   Opomba: Harary-jev graf $G_{n,2k}$ je graf, kjer vozlišča predstavljajo oglišča n-kotnika, vsako vozlišče pa je povezano s k zaporedni vozlišči na svoji levi strani in s k zaporednimi vozlišči na svoji desni strani.
   (a) Dokažite, da velja: $\chi(G_{n,2k}) = k + 1$.
   (b) Ali so takšni grafi $G_{n,2k}$ barvno kritični? Utemeljite.