1. Ekonomija zavarovanja

1. Predpostavimo, da ima lastnik vrednost premoženja enako 10000€. Naj velja:

   - $u(0) = -1$,
   - $u(10000) = 0$,
   - verjetnost, da se lastnik sooči z naključno izgubo X znaša $0,5$, verjetnost, da ostane pri trenutni vrednosti premoženja pa $0,5$.

   Pri takih pogojih je lastnik pripravljen plačati največji znesek G za popolno zavarovanje svojega premoženja po naslednji shemi

X	G
10000	6000
6000	3300
3300	1700

   a) Določite še preostale tri vrednosti lastnikove funkcije koristnosti u.

   b) Izračunajte naklone premic, ki povezujejo točke na grafu $u(w)$ in izračunajte stopnjo spremembe naklonov med odseki.

2. Odločiteljeva funkcija koristnosti je podana s predpisom $u(w) = -e^{-5w}$. Na razpolago ima dve naključni ekonomski možnosti X in Y. Pri tem je $X \sim \mathcal{N}(5, 2)$ in $Y \sim \mathcal{N}(6, 2.5)$. Kateri možnosti bo dal prednost?

3. Odločiteljeva funkcija koristnosti je podana s predpisom $u(w) = \sqrt{w}$, njegova trenutna vrednost premoženja pa znaša 10. Sooča se z naključno izgubo X, ki je porazdeljena enakomerno na intervalu $(0, 10)$. Koliko znaša največji znesek, ki ga je odločitelj pripravljen plačati za popolno zavarovanje proti naključni izgubi? Ali rezultat preseneča?

4. Odločiteljeva funkcija koristnosti je podana s predpisom $u(w) = w - 0,01w^2$, $w < 50$. Odločitelj bo obdržal premoženje w z verjetnostjo p in izgubil premoženje v vrednosti c z verjetnostjo $1 - p$. Poiščite največjo zavarovalno premijo, ki bi jo lastnik plačal za popolno zavarovanje, če

   a) $w = 10$, $c = 10$, $p = 0.5$,

   b) $w = 20$, $c = 10$, $p = 0.5$,

   c) Izračunajte a) in b), če je odločiteljeva funkcija koristnosti podana s predpisom $u(w) = -e^{-0,01w}$.

5. Naj bo u funkcija koristnosti, za katero velja: $u'(w) > 0$ in $u''(w) > 0$. Dokažite, da v tem primeru velja $G \leq \mu$.

6. Verjetnost, da posest ne bo poškodovana je $0,75$. Gostota porazdelitve naključne izgube X, za $x > 0$, pa je podana s predpisom $p(x) = 0,25(0,01e^{-0,01x})$. Lastnik posesti ima funkcijo koristnosti definirano kot $u(w) = -e^{-0,005w}$. Izračunajte

   a) pričakovano izgubo naključne spremenljivke,
   b) maksimalno zavarovalno premijo, ki jo je pripravljen plačati lastnik, za popolno zavarovanje posestva.

   Koliko več od pričakovane izgube bo plačal lastnik za popolno zavarovanje posesti?

7. Lastniku iz naloge (6.) so ponudili zavarovanje, ki bo krilo polovico kakršnekoli izgube v prihajajočem obdobju. Pričakovana vrednost delne izgube je $E\left(\frac{X}{2}\right) = 12,50$. Izračunajte maksimalno premijo, ki jo bo plačal lastnik za to zavarovanje. Koliko višja bo premija od pričakovane delne izgube?

8. Gostota porazdelitve naključne izgube X je

$$p(x) = \begin{cases} 0.75 & ; \quad x = 0 \\ 0,25(0,01e^{-0,01x}) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

   Lastnikova funkcija koristnosti je podana s predpisom $u(w) = -e^{-0,005w}$. Popolno zavarovanje lahko kupi za 40€, zavarovanje, ki bo krilo polovico kakršnekoli izgube pa za 25€. Katero zavarovanje se mu bolj splača?

9. Naj bo podana funkcija koristnosti $u(w) = \ln w$.

   a) Zavarovalnica Z_1 z neto vrednostjo 100 in funkcijo koristnosti $u(w)$ je sprejela tveganje X (in za to prejela premijo) z verjetnostno porazdelitvijo $P(X = 0) = P(X = 51) = \frac{1}{2}$. Kolikšen je največji znesek G, ki ga je potrebno plačati drugi zavarovalnici Z_2, da se zavaruje v celoti?
   b) Zavarovalnica Z_2 z neto vrednostjo 650 in funkcijo koristnosti $u(w)$ je pripravljena sprejeti zgornje tveganje. Kolikšen je najmanjši znesek H, ki bi ga ta zavarovalnica sprejela kot premijo, ki pokrije celotno izgubo?

10. Naj ima odločitelj funkcijo koristnosti $u(w) = -e^{-\alpha w}$ in naj bo izpostavljen naključni izgubi $X \sim \chi^2(n)$. Za $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ poišči največjo možno zavarovalno premijo G, ki jo je odločitelj še pripravljen plačati za popolno zavarovanje proti naključni izgubi.

11. Naj bo gostota naključne izgube X podana s predpisom $p(x) = 0,1e^{-0,1x}$, za vsak $x > 0$.

    a) Izračunajte pričakovano vrednost naključne izgube X.

b) Če je $P = 5$ (neto premija, ki jo je odločevalec pripravljen plačati za zavarovanje s kritjem izgube), dokažite, da zavarovanji, ki sta podani s predpisoma

- $I(x) = \frac{x}{2}$, $x \geq 0$,
- $I_d(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < d \\ x - d & ; \quad x \geq d \end{cases}$, kjer je $d = 10 \ln 2$,

predstavljata možni zavarovanji za $\beta = 5$.

12. Naj bo gostota naključne izgube X podana s predpisom $p(x) = \frac{1}{100}$, za vsak $0 < x < 100$.

a) Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo naključne izgube X.

b) Obravnavajte delno zavarovanje oblike $I(x) = kx$, $0 < k < 1$ in zavarovanje z odbitno franšizo d ter določite k in d tako, da bo neto premija zavarovanja v vsakem primeru znašala $\beta = P = 12.5$.

c) Dokažite, da je $D[X - I(X)] > D[X - I_d(x)]$.