2. Modeli tveganja za krajše obdobje

1. Lastnik sadovnjaka je za obdobje enega leta zavaroval svoj sadovnjak pred naravnimi nesrečami. Zavarovalnica izplača 10000€, če se naravna nesreča zgodi in ne plača ničesar, če se naravna nesreča v tem letu ne zgodi. Verjetnost izplačila zahtevka znaša $0,05$ (verjetnost, da se naravna nesreča v sadovnjaku zgodi). Naj naključna spremenljivka X predstavlja ta zahtevek (in hkrati tudi pojav naravne nesreče v sadovnjaku). Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo zahtevka.

2. Lastnik sadovnjaka je za obdobje enega leta zavaroval svoj sadovnjak pred dvema naravnima nesrečama, pri katerem je ločeno izplačilo glede na vrsto naravne nesreče. Če pride do škode v sadovnjaku zaradi pozebe, bo zavarovalnica izplačala 12000€, v primeru škode zaradi toče pa 8000€. Verjetnost za škodo zaradi pozebe je $0,02$, verjetnost za škodo zaradi toče pa $0,03$. Predpostavimo, da sta pozeba in toča popolnoma nezdružljiva dogodka. Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo naključne spremenljivke X, ki predstavlja zahtevek (in hkrati tudi pojav pozebe ali toče v sadovnjaku).

3. Zavarovalnica ponuja enoletno zavarovanje za kritje škode posesti. Ocenjuje, da pride do škode na posesti z verjetnostjo $0,05$. Če pride do škode, je vrednost škode na posesti (in s tem vrednost zahtevka) naključna spremenljivka, ki je enakomerno porazdeljena na intervalu $(0,20)$. Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo naključne spremenljivke X, ki predstavlja zahtevek in s tem škodo na posesti v tem časovnem obdobju.

4. Verjetnost požara v stavbi je v danem časovnem obdobju enaka $0,02$. Če se požar zgodi, je vrednost poškodbe stavbe (in s tem vrednost zahtevka) naključna spremenljivka, ki je enakomerno porazdeljena na intervalu $(0,a)$, kjer je a vrednost stavbe. Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo naključne spremenljivke X, ki predstavlja zahtevek in s tem poškodbo stavbe v tem časovnem obdobju.

5. Zavarovalnica ponuja enoletno avtomobilsko zavarovanje z odbitno franšizo d v vrednosti 150€ in zahtevkom v višini največ 4000€. Zavarovalnica ocenjuje, da pride do zahtevka z verjetnostjo $0,1$, da se zahtevki strogo med 0 in 4000€ pojavljajo z verjetnostjo $0,95$ ter da je gostota porazdelitve p vseh izplačil zahtevkov med 0€ in 4000€ v primeru, ko se zahtevek zgodi, podana s predpisom

$$p_{B|I=1}(x) = \frac{475}{10^6}\left(1 - \frac{x}{4000}\right).$$

   Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo naključne spremenljivke X, ki predstavlja zahtevek.

6. Naj bosta spremenljivki X in Y porazdeljeni po spodnji shemi. Izračunajte verjetnostno funkcijo spremenljivke $S = X + Y$.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

7. Naj bodo X_1, X_2, X_3 naključne neodvisne spremenljivke z verjetnostno funkcijo podano v tabeli. Poiščite verjetnostno ter porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke $S = X_1 + X_2 + X_3$.

x	$p_{X_1}(x)$	$p_{X_2}(x)$	$p_{X_3}(x)$
0	$0,4$	$0,5$	$0,6$
1	$0,3$	$0,2$	$0,0$
2	$0,2$	$0,1$	$0,1$
3	$0,1$	$0,1$	$0,1$
4	$0,0$	$0,1$	$0,1$
5	$0,0$	$0,0$	$0,1$

8. Naključni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni po eksponentni porazdelitvi s parametrom $\lambda = 1$. Določite gostoto verjetnosti in porazdelitveno funkcijo spremenljivke $S = X + Y$.

9. Naključni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni enakomerno, X na intervalu $(0, 2)$, Y pa na intervalu $(0, 3)$. Določite porazdelitveno funkcijo spremenljivke $S = X + Y$.

10. Naj bo $S = X_1 + X_2 + X_3$ in naj velja

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^3}{6} & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^3 - 3(x-1)^3}{6} & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^3 - 3(x-1)^3 + 3(x-2)^3}{6} & ; \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & ; \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Pokažite, da velja

a) $E[S] = 1.5$,

b) $D[S] = 0.25$.

11. Prebivalci hribovskega naselja so se, zaradi ogroženosti plazov, odločili za skupno zavarovanje nepremičnin. Zavarovalnica jim izplača vrednost 500 ali 1000, odvisno od verjetnosti uničenja nepremičnine zaradi plazov. V prvi skupini je 20 nepremičnin, verjetnost, da pride do zahtevka je enaka $0,02$. V drugi skupini je 10 nepremičnin, verjetnost, da pride do zahtevka pa je enaka $0,10$.

Zavarovalnica želi od vsakega zavarovanca pobrati bruto premijo $P = (1 + a)E(X_i)$, $a > 0$, kjer je X_i naključna spremenljivka, ki predstavlja izplačilo zavarovalnice oziroma zahtevek, $i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$. Zavarovalnica želi od 30 lastnikov nepremičnin hribovskega naselja pobrati znesek enak 95. centilu porazdelitve vseh zahtevkov. Izračunajte a, ter vrednost bruto premije za posamezen razred.

12. Zavarovalnica krije škodo 140 stavb v primeru požara največ do zneska navedenega v pogodbi. Število naročil glede na maksimalno vrednost izplačila v primeru požara, je navedeno v spodnji tabeli.

Maksimalna vrednost izplačila	Število pogodb
10000	80
20000	35
30000	25

Za vsako stavbo je verjetnost enega zahtevka v letu enaka $0,04$, verjetnost več kot enega zahtevka pa 0. Pogojna porazdelitev višine zahtevka v primeru, ko se zahtevek zgodi, je porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do maksimalnega zneska, navedenega v pogodbi. Naj naključna spremenljivka N predstavlja število zahtevkov in naključna spremenljivka S vrednost vseh zahtevkov v enem letu. Požari v stavbah so paroma neodvisni.

a) Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo za naključno spremenljivko N.

b) Izračunajte pričakovano vrednost in disperzijo za naključno spremenljivko S.

c) Zavarovalnica želi od vsakega zavarovanca pobrati bruto premijo $P = (1+a)E(X_i)$, $a > 0$, kjer je X_i naključna spremenljivka, ki predstavlja izplačilo zavarovalnice oziroma zahtevek, $i \in \{1, 2, \ldots, 140\}$. Zavarovalnica želi od vseh zavarovancev skupaj pobrati znesek enak 99. centilu porazdelitve vseh zahtevkov. Izračunajte a, ter vrednost bruto premije za posamezen razred.

13. Imamo mapo z 32 zavarovalnimi policami, ki so paroma neodvisne. Za vsako zavarovalno polico je verjetnost zahtevka enaka $\frac{1}{6}$. Gostota porazdelitve p naključne spremenljivke B, ki predstavlja izplačilo v primeru, ko se zahtevek zgodi, je podana s predpisom

$$p_{B|I=1}(x) = \begin{cases} 2(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Naj S označuje naključno spremenljivko vrednosti vseh zahtevkov v mapi. Izračunajte verjetnost, da naključna spremenljivka S zavzame vrednosti večje od 4.