

### 3. Porazdelitve preživetja

1. Za podani funkciji preživetja  $s_1$  in  $s_2$ ,  $s_1, s_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  za vsak  $x \geq 0$  izračunajte  $F_X(x)$ ,  $p_X(x)$  in  $\mu(x)$  ter pokažite, da lahko služita kot funkciji preživetja.

a)  $s_1 = e^{-x}$ ,

b)  $s_2 = e^{-\frac{x^2}{4}}$ .

2. Dana je porazdelitvena funkcija  $F_X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_X(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ . Pokažite, da lahko  $F_X$  služi kot porazdelitvena funkcija ter za vsak  $x \geq 0$  izračunajte  $s(x)$ ,  $p_X(x)$  in  $\mu(x)$ .

3. Dana je funkcija jakosti smrtnosti  $\mu : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu(x) = \tan x$ . Za vsak  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  izračunajte  $s(x)$ ,  $p_X(x)$  in  $F_X(x)$ .

4. Pokažite, da lahko vsaka od sledečih funkcij služi kot jakost smrtnosti v primeru, ko je  $x \geq 0$  in zapišite predpis pripadajoče funkcije preživetja novorojene osebe.

a)  $\mu(x) = Bc^x$                        $B > 0, c > 1$

b)  $\mu(x) = kx^n$                        $n > 0, k > 0$

c)  $\mu(x) = a(b+x)^{-1}$                $a > 0, b > 0$

5. Zakaj sledeče funkcije ne morejo služiti kot funkcije, ki jih predstavlja simbol?

a)  $\mu(x) = (1+x)^{-3}$                        $x \geq 0$

b)  $s(x) = 1 - \frac{22x}{12} + \frac{11x^2}{8} - \frac{7x^3}{24}$                        $0 \leq x \leq 3$

c)  $p(x) = x^{n-1}e^{-\frac{x}{2}}$                        $x \geq 0, n \geq 1$

6. Dana je gostota verjetnosti naključne spremenljivke  $X$ ,  $p_X(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}$ ,  $x \geq 0$ . Pokažite, da je pripadajoča funkcija preživetja novorojene osebe enaka  $s(x) = (1 + \beta x)e^{-\beta x}$ . Izračunajte tudi jakost smrtnosti.

7. Dana je funkcija preživetja novorojene osebe  $s : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$ . Za vsak  $x \in [0, 100]$  izračunajte:

a)  $\mu(x)$ ,

b)  $F_X(x)$ ,

c)  $p_X(x)$ ,

d)  $P(10 \leq X \leq 40)$ ,

e) funkcijo preživetja, jakost smrtnosti in gostoto naključne spremenljivke  $T_{40}$ , ki predstavlja bodočo življenjsko dobo osebe stare 40 let.

8. Dana je funkcija preživetja novorojene osebe  $s : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Izračunajte:
- a)  ${}_{17}p_{19}$       b)  ${}_{15}q_{36}$       c)  ${}_{15|13}q_{36}$       d)  $\mu(36)$       e)  $E[T_{36}]$
9. Naj bo jakost smrtnosti  $\mu(x) = 0,001$  za  $20 \leq x \leq 25$ . Izračunajte verjetnost  ${}_{2|2}q_{20}$ .
10. Naj bo verjetnost, da oseba stara  $x$  let preživi še naslednjih  $t$  let enaka  ${}_t p_x = \frac{100-x-t}{100-x}$  za  $0 \leq x \leq 100$  in  $0 \leq t \leq 100 - x$ . Izračunajte verjetnost, da bo novorojena oseba umrla v starosti 45 let, pri pogoju, da je dočakala 45 let.
11. Dana je funkcija jakosti smrtnosti osebe stare  $x$  let s predpisom  $\mu_x(t) = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}$  za  $0 \leq t \leq 85$ . Izračunajte verjetnost, da bo oseba stara  $x$  let preživela še naslednjih 20 let.
12. Naj bo jakost smrtnosti novorojene osebe  $\mu(x) = kx$ ,  $x > 0$ ,  $k > 0$  ter  ${}_{10}p_{35} = 0,81$ . Izračunajte  ${}_{20}p_{40}$ .
13. Če je čas preživetja 10 oseb moškega spola paroma neodvisen in je funkcija preživetja definirana s tablico smrtnosti ZDA, 2014. Poiščite gostoto verjetnosti, pričakovano vrednost in disperzijo naključne spremenljivke  $\mathcal{L}_{65}$ , ki šteje preživеле osebe moškega spola v starosti 65 let.
14. Naj bo v začetni populaciji 9 ljudi ter naj bo njihova funkcija preživetja enaka  $s(x) = 1 - \frac{x}{12}$ ,  $0 \leq x \leq 12$ . Za naključne spremenljivke  ${}_3\mathcal{D}_{3i}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  izračunajte njihovo pričakovano vrednost in disperzijo, če je čas preživetja oseb paroma neodvisen.
15. S pomočjo tablice smrtnost za ženske ZDA, 2014
- a) primerjajte vrednosti  ${}_5q_0$ ,  ${}_5q_5$  in  ${}_5q_{10}$ ,
- b) izračunajte verjetnost, da ženska stara 25 let umre v starosti med 80. in 85. letom,
- c) izračunajte verjetnost, da ženska stara 46 let umre v starosti med 70. in 80. letom.
16. Bodoča življenjska doba  $T_x$  ima porazdelitveno funkcijo  $F_{T_x} : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$  podano s predpisom

$$F_{T_x}(t) = \begin{cases} \frac{t}{100-x} & ; 0 < t < 100 - x \\ 1 & ; t > 100 - x \end{cases}$$

Izračunajte:

- a)  $\check{e}_x$       b)  $D(T_x)$       c)  $me_x$

17. Naj bo  $T^*(x)$  naključna spremenljivka za katero velja

$$T^*(x) = \begin{cases} T(x) & ; \quad 0 \leq T(x) \leq n \\ n & ; \quad T(x) > n \end{cases}$$

in označimo  $E[T^*(x)]$  z  $\dot{e}_{x:\overline{n}|}$ . Pokažite, da velja

a)  $\dot{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t p_x dt,$

b)  $D(T^*(x)) = 2 \int_0^n t p_x dt - \dot{e}_{x:\overline{n}|}^2.$