3. Porazdelitve preživetja

Starost v času smrti

$X \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja **starost ob smrti novorojene osebe**

Porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ naključne spremenljivke X, $F_X : [0, \infty) \to [0, 1]$, je definirana kot

$$F_X(x) = P(X < x) \quad \text{oz.} \quad F_X(x) = \int_0^x p_X(t)dt,$$

kjer je $p_X(t)$ gostota verjetnosti naključne spremenljivke X.

Verjetnost, da novorojena oseba umre med letoma x in y, $x < y$:

$$P(x \leq X < y) = F_X(y) - F_X(x) = s(x) - s(y)$$

Pogojna verjetnost, da bo novorojena oseba umrla med letoma x in y, $x < y$, pri pogoju, da je dočakala starost x let

$$P(x \leq X < y | X \geq x) = \frac{F_X(y) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{s(x) - s(y)}{s(x)}$$

Funkcija preživetja $s(x)$ naključne spremenljivke X, $s : [0, \infty) \to [0, 1]$, predstavlja verjetnost, da bo novorojena oseba dočakala x let

$$s(x) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x).$$

$T_x \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja **bodočo življenjsko dobo** osebe stare x let ($x \geq 0$).

Porazdelitvena funkcija ${}_tq_x$ naključne spremenljivke T_x predstavlja verjetnost, da bo oseba stara x umrla v prihodnjih t letih

$${}_tq_x = F_{T_x}(t) = P(T_x < t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}, \quad t \geq 0.$$

Funkcija preživetja ${}_tp_x$ naključne spremenljivke T_x, predstavlja verjetnost, da bo oseba stara x let preživela še t let

$${}_tp_x = P(T_x \geq t) = 1 - {}_tq_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}, \quad t \geq 0.$$

Verjetnost, da bo oseba stara x let preživela nadaljnih t let in umrla v starosti med $x + t$ in $x + t + u$:

$${}_{t|u}q_x = P(t \leq T_x < t + u) = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}, \quad t, u \geq 0.$$

Nenegativno funkcijo $\mu(x)$, $\mu(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, s predpisom

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

imenujemo **jakost smrtnosti** in predstavlja pogojno verjetnost, da bo oseba umrla v starosti x let, pri pogoju, da je dočakala x let.

Uporabne formule (za $t \geq 0$):

- $p_{T_x}(t) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = {}_tp_x \cdot \mu(x+t)$,
- ${}_tp_x = e^{-\int\limits_x^{x+t} \mu(y)dy} = e^{-\int\limits_0^t \mu(x+s)ds}$,
- $p_X(t) = e^{-\int\limits_0^t \mu(s)ds} \cdot \mu(t) = {}_tp_0 \cdot \mu(t)$,

Tablice smrtnosti

$p_x \ldots$ verjetnost, da oseba stara x let preživi eno leto
$q_x \ldots$ verjetnost, da oseba stara x let umre v enem letu
$l_x \ldots$ pričakovano število živih oseb starih x let
$d_x \ldots$ pričakovano število oseb starih x let, ki so umrli v enem letu
$l_0 \ldots$ število novorojenih oseb (velikost začetne populacije)

Veljajo naslednje povezave:

- $l_x = s(x) \cdot l_0, \quad x \geq 0$,
- ${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$,
- ${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$,
- ${}_{t|u}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x}$.

$\mathscr{L}_x \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja število živih oseb starih x let
$I_j \ldots$ naključna spremenljivka indikator

Velja

- $\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$,
- $E[\mathscr{L}_x] = l_0 \cdot s(x) = l_x$,
- Če so vsi indikatorji I_j paroma neodvisni, ima naključna spremenljivka $\mathscr{L}_x$ binomsko porazdelitev s parametroma $n = l_0$ in $p = s(x)$, $\mathscr{L}_x \sim b(l_0, s(x))$.

Nekatere druge karakteristike tablic smrtnosti

$\mathring{e}_x \ldots$ **popolno pričakovanje življenja** osebe stare x let (pričakovana vrednost naključne spremenljivke T_x)
$me_x \ldots$ mediana naključne spremenljivke T_x

$$\mathring{e}_x = E[T_x] = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

$$D(T_x) = 2\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt - \mathring{e}_x^2$$

$$P(T_x \geq me_x) = \frac{s(x + me_x)}{s(x)} = \frac{1}{2}$$