4. Življenjska zavarovanja

Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

$T = T_x \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja bodočo življenjsko dobo osebe stare x let $(x \geq 0)$
$t \ldots$ čas trajanja zavarovanja $(t \geq 0)$
$i \ldots$ efektivna letna obrestna mera
$\delta \ldots$ jakost obresti

Model lahko zastavimo s pomočjo

- funkcije dobička b_t in
- diskontne funkcije $v_t = v^t = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = e^{-\delta t}$

$z_t \ldots$ **funkcija neto sedanje vrednosti prihodnjega izplačila**, $z_t = b_t \cdot v^t$

Ker je čas od sklenitve zavarovalne police do izteka zavarovanja odvisen od naključja, je tudi sedanja vrednost izplačila z_t naključna spremenljivka, ki jo označimo z $Z = Z_T$.

Model zavarovanja: $\mathbf{Z} = \mathbf{b_T} \cdot \mathbf{v^T}, \quad T \geq 0.$

Matematičnemu upanju naključne spremenljivke Z, $\mathbf{E}[\mathbf{Z}] = \bar{\mathbf{A}}$, pravimo **aktuarska sedanja vrednost** življenjskega zavarovanja v vrednosti ene denarne enote. Za vsak $j \geq$ velja

$$E[Z^j] = \int_{\mathbb{R}} (v^t)^j \cdot p_T(t) dt.$$

Disperzija naključne spremenljivke Z je enaka

$$D(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = {}^2\bar{A} - \bar{A}^2,$$

kjer ${}^2\bar{A}$ predstavlja aktuarsko sedanjo vrednost za življenjsko zavarovanje, računano z dvojno jakostjo obresti 2δ.

Tipi zavarovanj, njihove aktuarske sedanje vrednosti in disperzije

1. Življenjsko zavarovanje za primer smrti v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}, \quad D(Z) = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2$$

2. Doživljenjsko zavarovanje za primer smrti.

$$E[Z] = \bar{A}_x, \quad D(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

3. Življenjsko zavarovanje za doživetje v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}} = E[v^n I] = v^n {}_np_x, \quad D(Z) = {}^2A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}} - (A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}})^2 = v^{2n} {}_np_x \cdot {}_nq_x$$

4. Mešano življenjsko zavarovanje za obdobje n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = \bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}, \quad D(Z) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2$$

5. m-let odloženo doživljenjsko zavarovanje, $m \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = {}_{m|}\bar{A}_x, \quad D(Z) = {}_{m|}{}^2\bar{A}_x - ({}_{m|}\bar{A}_x)^2$$

6. Zvezno naraščajoče doživljenjsko zavarovanje za primer smrti.

$$E[Z] = (\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty t v^t p_T(t) dt = \int_0^\infty {}_{s|}\bar{A}_x ds, \quad D(Z) = {}^2(\bar{I}\bar{A})_x - ((\bar{I}\bar{A})_x)^2$$

7. Zvezno padajoče življenjsko zavarovanje za primer smrti v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = (\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-t) v^t p_T(t) dt, \quad D(Z) = {}^2(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} - ((\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|})^2$$

Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja

$K = K_x \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja število preživelih let osebe osebe stare x let ($x \geq 0$)
$b_{k+1} \ldots$ funkcija dobička, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
$v_{k+1} \ldots$ diskontna funkcija, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
$z_{k+1} = b_{k+1} \cdot v^{k+1} \ldots$ funkcija neto sedanje vrednosti

Čas k je odvisen od naključja, zato je tudi sedanja vrednost izplačila z_{k+1} naključna spremenljivka, ki jo označimo z $Z = Z_{K+1}$.

Model zavarovanja: $\mathbf{Z} = \mathbf{b_{K+1}} \cdot \mathbf{v^{K+1}}, \quad K \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Aktuarsko sedanjo vrednost spremenljivke Z označimo z $\mathbf{E}[\mathbf{Z}] = \mathbf{A}$. Velja

$$E[Z] = A = \sum_k v^{k+1} P(K = k)$$

Disperzija naključne spremenljivke Z je enaka

$$D(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = {}^2A - A^2,$$

kjer ${}^2A$ predstavlja aktuarsko sedanjo vrednost za življenjsko zavarovanje, računano z dvojno jakostjo obresti 2δ.

Tipi zavarovanj, njihove aktuarske sedanje vrednosti in disperzije

1. Življenjsko zavarovanje za primer smrti v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = A^{1}_{x:\overline{n}|}, \quad D(Z) = {}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} - (A^{1}_{x:\overline{n}|})^2$$

2. Doživljenjsko zavarovanje za primer smrti.

$$E[Z] = A_x, \quad D(Z) = {}^2A_x - (A_x)^2$$

3. Življenjsko zavarovanje za doživetje v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E[v^n I] = v^n {}_np_x, \quad D(Z) = {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^2 = v^{2n} {}_np_x \cdot {}_nq_x$$

4. Mešano življenjsko zavarovanje za obdobje n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}, \quad D(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2$$

5. m-let odloženo doživljenjsko zavarovanje, $m \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = {}_{m|}A_x, \quad D(Z) = {}_{m|}{}^2A_x - ({}_{m|}A_x)^2$$

6. Letno naraščajoče doživljenjsko zavarovanje za primer smrti.

$$E[Z] = (IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1} {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad D(Z) = {}^2(IA)_x - ((IA)_x)^2$$

7. Letno padajoče življenjsko zavarovanje za primer smrti v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Z] = (DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1} {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad D(Z) = {}^2(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} - ((DA)^{1}_{x:\overline{n}|})^2$$

Komutacijska števila

$l_x \ldots$ pričakovano število živih oseb starih x let
$d_x = l_x - l_{x+1} \ldots$ pričakovano število oseb starih x let, ki so umrli v enem letu
$D_x = v^x \cdot l_x \ldots$ diskontirano število živih oseb starih x let

$C_x = v^{x+1} \cdot d_x \ldots$ diskontirano število umrlih pri starosti x let

$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} \ldots$ vsota diskontiranih števil umrlih

$R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \ldots$