

5. Življenjske rente

1. Pokažite, da za disperzijo doživljenjske rente velja $D[Y] = \frac{2}{\delta} (\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x) - (\bar{a}_x)^2$.
2. Naj bo oseba stara x let izpostavljena konstantni jakosti smrtnosti ter naj bo jakost obresti prav tako konstantna. Za zvezno doživljenjsko rento z izplačilom ene denarne enote izračunajte
 - a) aktuarsko sedanjo vrednost,
 - b) disperzijo,
 - c) verjetnost, da bo dejanska sedanja vrednost izplačila večja od pričakovane vrednosti izplačila,
 - d) aktuarsko sedanjo vrednost in disperzijo pri $\mu = 0,05$ in $\delta = 0,02$.
3. Pokažite, da veljajo naslednje enakosti
 - a) $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}$,
 - b) $1 - {}_nE_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$,
 - c) $a_{x:\overline{n}|} = E_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}$,
 - d) $\frac{d}{dx} \bar{a}_x = [\mu(x) + \delta] \cdot \bar{a}_x - 1$.
4. Podana je funkcija, ki podaja število živih oseb starih x let, s predpisom $l_x = 100000 \cdot (100 - x)$, $0 \leq x \leq 100$. Naj letna efektivna obrestna mera znaša $i = 0$. Izračunajte aktuarsko sedanjo vrednost doživljenjske rente, ki je izdana osebi stari 80 let. Renta se zvezno izplačuje v letni vrednosti 1 za prvo leto ter v letni vrednosti 2 od drugega leta naprej. Izračunajte še aktuarsko sedanjo vrednost za zvezno življenjsko rento za primer smrti v obdobju naslednjih 5 let.
5. Naj bo funkcija, ki podaja število živih oseb starih x let enaka kot v prejšnji nalogi. Izračunajte aktuarsko sedanjo vrednost zvezne naraščajoče življenjske rente z letnim povišanjem v letni vrednosti 1, ki je izdana osebi stari 95 let.
6. Oseba stara x let je izpostavljena smrtnosti $\mu = 0,02$. Pri konstantni jakosti obresti $\delta = 0,1$ izračunajte aktuarsko sedanjo vrednost 10 odložene zvezne doživljenjske rente z letnim izplačilom v vrednosti 1000€ in aktuarsko sedanjo vrednost 10 odloženega doživljenjskega zavarovanja za primer smrti, z enkratnim izplačilom v vrednosti 10000€, ki se izplača v trenutku smrti zavarovanca.

7. Naj bo letna efektivna obrestna mera $i = 0,03$. S pomočjo spodnje tabele izračunajte verjetnost, da oseba stara 73 let preživi še eno leto.

x	\ddot{a}_x
72	8,06
73	7,73
74	7,43
75	7,15

8. Podana je tablica smrtnosti.

x	80	81	82	83	84	85	86
l_x	250	217	161	107	62	28	0

Osemdestletnik se odloči za nakup doživljenjske rente z letnim izplačilom 5000€. Izračunajte enkratno neto premijo (prenumerandno in postnumerandno), ki jo mora plačati, če je letna efektivna obrestna mera enaka $i = 6,5\%$.

9. S pomočjo komutacijskih števil izrazite aktuarske sedanje vrednosti prenumerandnih življenjskih rent z izplačilom ene denarne enote za
- doživljenjsko rento,
 - življenjsko rento za primer smrti v obdobju naslednjih n let,
 - m -let odloženo življenjsko rento za primer smrti v obdobju naslednjih n let.