5. Življenjske rente

Zvezne življenjske rente

$T = T_x \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja bodočo življenjsko dobo osebe stare x let ($x \geq 0$)
$Y \ldots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja neto sedanjo vrednost vseh možnih bodočih izplačil odvisnih od preživetja osebe stare x let.

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{a}}_{\overline{T|}} = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{v}^{\mathbf{T}}}{\delta}, \ T \geq 0.$$

Matematičnemu upanju naključne spremenljivke Y, $\mathbf{E}[\mathbf{Y}] = \bar{\mathbf{a}}$, pravimo **aktuarska sedanja vrednost** življenjske rente v vrednosti ene denarne enote. Velja

$$\bar{a} = E(Y) = \int_{\mathbb{R}} \bar{a}_{\overline{t|}} \cdot p_T(t) dt.$$

Disperzija naključne spremenljivke Y je enaka

$$D(Y) = D(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{{}^2\bar{A} - \bar{A}^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a} - {}^2\bar{a}\right) - (\bar{a})^2,$$

kjer ${}^2\bar{A}$ in ${}^2\bar{a}$ predstavljata aktuarsko sedanjo vrednost za življenjsko zavarovanje in rento, računano z dvojno jakostjo obresti 2δ.

Povezava med aktuarsko sedanjo vrednostjo zveznih rent $\bar{a}$ in aktuarsko sedanjo vrednostjo zavarovanj $\bar{A}$

$$\bar{A} + \delta \cdot \bar{a} = 1 \quad \text{in} \quad {}^2\bar{A} + 2\delta \cdot {}^2\bar{a} = 1.$$

Tipi rent, njihove aktuarske sedanje vrednosti in disperzije

1. Doživljenjska renta za primer smrti.

$$E[Y] = \bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x dt, \quad D(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}.$$

2. Življenjska renta za primer smrti v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Y] = \bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x dt, \quad D(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2}{\delta^2}.$$

3. m-let odložena življenjska renta, $m \in \mathbb{N}$.

$$E[Y] = {}_{m|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m|}}, \quad D(Y) = \frac{2}{\delta} v^{2m} \, {}_mp_x \left(\bar{a}_{x+m} - {}^2\bar{a}_{x+m}\right) - \left({}_{m|}\bar{a}_x\right)^2.$$

4. n-let sigurna doživljenjska renta, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Y] = \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + (\bar{a}_{x} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}), \quad D(Y) = \frac{2}{\delta} v^{2m}{}_{m}p_x \left(\bar{a}_{x+m} - {}^2\bar{a}_{x+m}\right) - \left({}_{m|}\bar{a}_x\right)^2.$$

Diskretne življenjske rente

$K = K_x \dots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja število preživelih let osebe osebe stare x let ($x \geq 0$)
$Y \dots$ naključna spremenljivka, ki predstavlja neto sedanjo vrednost vseh možnih bodočih izplačil odvisnih od preživetja osebe stare x let.

$$\mathbf{Y_1} = \ddot{\mathbf{a}}_{\overline{K+1}|} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{Y_2} = \mathbf{a}_{\overline{K}|}, \quad K = 0, 1, 2, \dots.$$

Aktuarski sedanji vrednosti spremenljivk Y_1 in Y_2 označimo z $E[Y_1] = \ddot{a}_x$ in $E[Y_2] = a_x$. Velja

$$E[Y_1] = \ddot{a}_x = \sum_k \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot P(K = k), \quad E[Y_2] = a_x = \sum_k a_{\overline{k}|} \cdot P(K = k).$$

Tipi rent, njihove aktuarske sedanje vrednosti in disperzije

1. Doživljenjska renta za primer smrti.

$$E[Y_1] = \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k{}_k p_x, \quad E[Y_2] = a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k{}_k p_x,$$

$$D(Y_1) = D(Y_2) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2}.$$

2. Življenjska renta za primer smrti v obdobju naslednjih n let, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Y_1] = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_k p_x, \quad E[Y_2] = a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k{}_k p_x,$$

$$D(Y_1) = D(Y_2) = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}.$$

3. m-let odložena življenjska renta, $m \in \mathbb{N}$.

$$E[Y_1] = {}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m}, \quad E[Y_2] = {}_{m|}a_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m}.$$

4. n-let sigurna doživljenjska renta, $n \in \mathbb{N}$.

$$E[Y_1] = \ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k{}_k p_x, \quad E[Y_2] = a_{\overline{x:\overline{n}|}} = a_{\overline{n}|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k{}_k p_x.$$