8. Zavarovanja za več življenj

1. Naj bosta naključni spremenljivki T_x in T_y neodvisni z gostoto verjetnosti

$$p_{T_x}(t) = p_{T_y}(t) = \begin{cases} 0,02(10-t) & ; \quad 0 < t < 10 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   (a) Določite porazdelitveno funkcijo, funkcijo preživetja in jakost smrtnosti za naključno spremenljivko T_x.

   (b) Določite gostoto verjetnosti, porazdelitveno funkcijo in funkcijo preživetja za skupno porazdelitev bodočih življenjskih dob T_x in T_y.

2. Za osebi stari x in y je gostota naključnega vektorja $S = T_x T_y$ podana s predpisom

$$p_S(t,u) = \begin{cases} \frac{3u^2}{10^8} & ; \quad 0 < t, u < 100 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte verjetnost (za skupno porazdelitev bodočih življenjskih dob), da novorojeni osebi preživita 60 let.

3. Naj bosta bodoči življenjski dobi oseb starih x in y let neodvisni. S pomočjo funkcij preživetja ene osebe (${}_np_x$, ${}_np_y$) izrazite verjetnost, da

   (a) bo status skupnega življenja xy preživel n let,

   (b) bo natanko ena od oseb stara x in y let preživela n let,

   (c) bo vsaj ena od oseb starih x in y let preživela n let,

   (d) bo status skupnega življenja xy propadel v roku n let,

   (e) bo vsaj ena od oseb stara x in y let umrla v roku n let,

   (f) bosta obe osebi stari x in y let umrli v roku n let.

4. Naj bosta bodoči življenjski dobi oseb starih 60 in 75 let, ki sestavljata eno skupino, neodvisni. S pomočjo funkcij preživetja ene osebe izrazite verjetnost, da

   (a) prva smrt v tej skupini nastopi med 15. in 25. letom od sedaj,

   (b) zadnja smrt v tej skupini nastopi med 15. in 25. letom.

5. Podana je funkcija jakost smrtnosti $\mu : [0,100] \to \mathbb{R}$ s predpisom $\mu(x) = \frac{1}{100-x}$. Če sta bodoči življenjski dobi oseb starih x in y let neodvisni, izračunajte

   (a) verjetnost, da bo status skupnega življenja dveh oseb, ki sta stari 40 in 50 let, obstajal še 10 let,

   (b) verjetnost, da bo status zadnjega preživelega dveh oseb, ki sta stari 40 in 50 let, obstajal še 10 let,

(c) popolno pričakovanje življenja za status skupnega življenja dveh oseb, ki sta stari 40 in 50 let,

(d) popolno pričakovanje življenja za zadnjega preživelega dveh oseb, ki sta stari 40 in 50 let,

(e) disperzijo za status skupnega življenja dveh oseb, ki sta stari 40 in 50 let.

6. Naj bosta bodoči življenjski dobi oseb starih x in y let neodvisni. Izračunajte verjetnost, da bo oseba stara 40 še vedno živa ob starosti 75, če ${}_{25}p_{25:50} = 0,2$ in ${}_{15}p_{25} = 0,9$.

7. Podani sta jakosti smrtnosti za posameznika A in B

$$\mu^A(x) = \ln \frac{10}{9}, \quad \text{za vsak } x \qquad \text{in} \qquad \mu^B(x) = (10-x)^{-1}, \quad 0 \le x < 10$$

Če sta oba posameznika stara 1 leto in sta njuni bodoči življenjski dobi neodvisni, kolikšna je verjetnost, da se bo prva smrt v tej skupini zgodila med leti (starostjo) 3 do 5.

8. Podana je naslednja tablica smrtnosti.

x	Moški q_x	Ženska q_x
80	0.10	0.07
81	0.12	0.09
82	0.14	0.11
83	0.16	0.13
84	0.18	0.15

Bodoči življenjski dobi moškega starega 82 let in ženske stare 80 let sta neodvisni.

(a) Izračunajte verjetnost, da bo prva smrt v tej skupini nastopila v tretjem letu od sedaj.

(b) Izračunajte verjetnost, da bo zadnja smrt v tej skupini nastopila v tretjem letu od sedaj.

9. Naj bo verjetnost, da oseba, ki ne kadi in je stara x let ter umre v naslednjih t letih enaka ${}_tq_x^{nekadilec} = \frac{70-x+t}{80-x}$ za $0 \le x \le 70$ in $0 \le t \le 10$. Prav tako naj bo jakost smrtnosti za osebo, ki kadi, dvakrat večja kot za osebo, ki ne kadi. Izračunajte popolno pričakovanje življenja za status skupnega življenja kadilca starega 70 let in nekadilke stare 70 let. Bodoči življenjski dobi oseb sta neodvisni.

10. Zapišite z aktuarskimi oznakami in izračunajte aktuarsko sedanjo vrednost zvezne rente z letnim izplačilom v vrednosti 1 dokler vsaj ena od oseb starih 25 in 30 let še živi in je mlajša od 50 let, če je jakost obresti $\delta = 0,1$ ter je podana funkcija, ki podaja število živih oseb starih x let, s predpisom

$$l_x = 100 - x \qquad 0 \leq x \leq 100.$$

Bodoči življenjski dobi oseb starih 25 in 30 let sta neodvisni.

11. Doživljenjska renta za skupino dveh oseb starih 30 in 40 let se zvezno izplačuje na naslednji način:

Če sta obe osebi še živi, se izplačuje letna vrednost 1000 € če pa je natanko ena oseba še živa, se izplačuje letna vrednost 650 € . Zapišite z aktuarskimi oznakami in izračunajte aktuarsko sedanjo vrednost te rente, če sta bodoči življenjski dobi oseb starih 30 in 45 let neodvisni in je verjetnost, da oseba stara x let preživi še nadaljnjih t let enaka ${}_tp_x = 1 - \frac{t}{100-x}$, $0 \leq x \leq 100$ ter je letna efektivna obrestna mera $i = 0$.

12. S pomočjo aktuarskih oznak zapišite aktuarsko sedanjo vrednost odložene življenjske rente, ki plačuje 1 denarno enoto ob koncu vsakega leta dokler bodisi oseba stara 25 let, bodisi oseba stara 30 let še živi in je stara več kot 50 let.

13. Zapišite s pomočjo aktuarskih oznak aktuarsko sedanjo vrednost zvezne življenjske rente, ki plačuje letno vrednost 1, če je vsaj ena od oseb, ki sta stari 40 in 55 let, še živa in je vsaj ena od njiju stara več kot 60 let in se ne plačuje, če je oseba danes stara 40 let še živa in je mlajša od 55 let. Bodoči življenjski dobi oseb starih 40 in 55 let sta neodvisni.

14. Osebama starima x in y let je izdano zvezno zavarovanje, ki zagotavlja izplačilo v vrednosti 1 ob smrti druge osebe. Osebi za to zavarovanje plačujeta premije do smrti prve osebe. Bodoči življenjski dobi oseb povezuje naslednja zveza

$${}_tp_{xy} = r\,{}_tp_x + (1-r)\,{}_tp_x \cdot {}_tp_y, \qquad 0 < r < 1$$

Pri konstantni jakosti smrtnosti $\mu_x = \mu_y = \mu$ in obrestovaja v odvisnosti od r, μ in δ določite

(a) $\bar{a}_{xy}$,
(b) $\bar{A}_{xy}$,
(c) $\bar{A}_{\overline{xy}}$.

Določite še gostoto porazdelitve za naključno spremenljivko T_xT_y.

15. Izračunajte verjetnost, da za skupino dveh oseb starih x in y let velja, da oseba stara x let umre pred osebo staro y let in da se to zgodi čez največ 7 let, če je gostota naključnega vektorja T_xT_y podana s predpisom

$$p_{T_xT_y}(s,t) = \begin{cases} 0,0012(t-s)^2 & ; \quad 0 < s,t < 10 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

16. Pri jakosti obresti $\delta = 0,01$ izračunajte aktuarsko sedanjo vrednost doživljenjskega zavarovanja za skupino dveh oseb starih x in y let, ki izplača zavarovalnino v enkratni vrednost 5000 € v trenutku smrti osebe stare x let, pri pogoju, da je oseba stara y let še živa. Bodoči življenjski dobi oseb starih x in y let sta neodvisni, njuna gostota je podana s predpisom

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{25000}(10-t) & ; \quad 0 < t < 10 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

17. Naj bosta bodoči življenjski dobi oseb starih x in y let neodvisni. Izpeljite formulo za verjetnost, da oseba stara x let umre pred osebo staro y let in da se to zgodi čez največ n let v primeru konstantne jakosti smrtnosti za osebi stari x in y let (μ_x in μ_y). Za $\mu_x = 0,02$ in $\mu_y = 0,03$ izračunajte še
    (a) ${}_{\infty}q_{\overset{1}{40}:45}$,
    (b) ${}_{20}q_{\overset{2}{40}:45}$.

18. Naj bosta bodoči življenjski dobi oseb starih x in y let neodvisni in naj bo funkcija, ki podaja število živih oseb starih x let, za naključno sprmenljivko T_x podana s predpisom $l_{T_x} = 100(95-x)$, $0 \leq x \leq 95$, oseba stara y let pa naj bo izpostavljena konstantni jakosti smrtnosti. Izračunajte verjetnost, da oseba stara x let umre pred osebo staro y let in da se to zgodi čez največ n let.