8. Zavarovanja za več življenj

$T_x \ldots$ bodoča življenjska doba osebe stare x let
$T_y \ldots$ bodoča življenjska doba osebe stare y let

Skupna porazdelitev bodočih življenjskih dob

$S = T_x T_y \ldots$ **bodoča življenjska doba skupine dveh oseb**
Porazdelitvena funkcija S, $F_S : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ima predpis

$$F_S(t,u) = P(S < (t,u)) = P((T_x < t)(T_y < u)),\ t,u \geq 0.$$

Funkcija preživetja $s = s_S : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ima predpis

$$s(t,u) = P(S \geq (t,u)) = P((T_x \geq t)(T_y \geq u)),\ t,u \geq 0.$$

Status skupnega življenja

Skupina obstoji (preživi), če preživijo vsi njeni člani in propade (umre), če umre en njen član (oznaka $(\mathbf{xy}) = \mathbf{xy}$).

$\mathbf{T_{xy} = min\{T_x, T_y\}} \ldots$ bodoča življenjska doba statusa skupnega življenja dveh oseb starih x let in y let

- ${}_tq_{xy} \ldots$ verjetnost, da bo status skupnega življenja dveh oseb (xy) propadel v naslednjih t letih

  $${}_tq_{xy} = F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} < t) = 1 - s_{T_xT_y}(t,t) = {}_tq_x + {}_tq_y - F_{T_xT_y}(t,t),$$

- Jakost smrtonsti $\mu_{xy}(t) = \frac{p_{T_{xy}}(t)}{1-F_{T_{xy}}(t)}$ (oz. $\mu_{xy}(t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$),
- Popolno pričakovanje življenja $\mathring{e}_{xy} = E(T_{xy}) = \int_0^\infty t \cdot p_{T_{xy}}(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_{xy}dt.$

Status zadnjega preživelega

Status pri katerem skupina obstoji (preživi), če je živ še vsaj en njen član in propade (umre), če umrejo vsi člani (oznaka $(\overline{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{xy}}$).

$\mathbf{T_{\overline{xy}} = max\{T_x, T_y\}} \ldots$ bodoča življenjska doba statusa zadnjega preživelega v skupini dveh oseb starih x let in y let

- Popolno pričakovanje življenja $\mathring{e}_{\overline{xy}} = E(T_{\overline{xy}}) = \int_0^\infty t \cdot p_{T_{\overline{xy}}}(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}}dt.$

Med T_{xy}, $T_{\overline{xy}}$, T_x in T_y obstajajo povezave (za $t \geq 0$)

- $T_{xy} + T_{\overline{xy}} = T_x + T_y, \qquad T_{xy} \cdot T_{\overline{xy}} = T_x \cdot T_y,$
- $F_{T_{xy}}(t) + F_{T_{\overline{xy}}}(t) = F_{T_x}(t) + F_{T_y}(t),$

- ${}_tq_{xy} + {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x + {}_tq_y$.
- ${}_tp_{xy} + {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y$,
- $p_{T_{xy}} + p_{T_{\overline{xy}}}(t) = p_{T_x}(t) + p_{T_y}(t)$,
- $\mathring{e}_{xy} + \mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y$,
- $\mathrm{Kov}(\mathrm{T_{xy}}, \mathrm{T_{\overline{xy}}}) = \mathrm{Kov}(\mathrm{T_x}, \mathrm{T_y}) + (\mathring{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} - \mathring{\mathrm{e}}_{\mathrm{xy}})(\mathring{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}} - \mathring{\mathrm{e}}_{\mathrm{xy}})$

Zavarovanja in rente za več življenj

$T_u \ldots$ bodoča življenjska doba skupine u, ki predstavlja čas do propada skupine

PRIMER: Doživljenjsko zavarovanje z izplačilom 1 v trenutku propada skupine u ($Z = v^{T_u}$):

$$\bar{A}_u = E(Z) = \int_0^\infty v^t {}_tp_u \mu_u(t)dt, \qquad D(Z) = {}^2\bar{A}_u - (\bar{A}_u)^2$$

Če je u status zadnjega preživelega dveh oseb dobimo

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t {}_tp_{\overline{xy}} \mu_{\overline{xy}}(t)dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu(x+t)dt + \int_0^\infty v^t {}_tp_y \mu(y+t)dt - \int_0^\infty v^t {}_tp_{xy} \mu_{xy}(t)dt$$

PRIMER: Doživljenjska renta, ki se zvezno izplačuje v letni vrednosti 1 do propada skupine u ($Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$):

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_tp_u \mu_u(t)dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_u dt, \qquad D(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_u - (\bar{A}_u)^2}{\delta^2}$$

V tem primeru za skupino u velja $\bar{A}_u + \delta \cdot \bar{a}_u = 1$.

Če je u status zadnjega preživelega dveh oseb dobimo

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_tp_{\overline{xy}} \mu_{\overline{xy}}(t)dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_{\overline{xy}} dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt + \int_0^\infty v^t {}_tp_y dt - \int_0^\infty v^t {}_tp_{xy} dt$$

Veljata zvezi

$$\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y \quad \text{in} \quad \bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$

Enostavne pogojne funkcije

Proučujemo zavarovanja, ki niso odvisna le od časa propada skupine, ampak od vrstnega reda smrti posameznikov v skupini.

$\mathbf{{}_nq^1_{xy}}$ … verjetnost, da oseba stara x let umre pred osebo staro y let in da se to zgodi čez največ n let

$$ {}_nq^1_{xy} = \int_0^n ds \int_s^\infty p_{T_xT_y}(s,t)dt = \int_0^n {}_sp_y\,{}_sp_x\mu(x+s)ds $$

$\mathbf{{}_nq_{x\overset{2}{y}}}$ … verjetnost, da oseba stara y let umre za osebo staro x let in da se to zgodi čez največ n let

$$ {}_nq_{x\overset{2}{y}} = \int_0^n dt \int_0^t p_{T_xT_y}(s,t)ds = \int_0^n {}_tq_x\,{}_tp_y\mu(y+t)dt = {}_nq_y - {}_nq_{x\overset{1}{y}} $$

Če zamenjamo vrstni red integracije

$$ {}_nq_{x\overset{2}{y}} = \int_0^n ds \int_s^n p_{T_xT_y}(s,t)dt = \int_0^n ({}_sp_y - {}_np_y)\,{}_sp_x\mu(x+s)ds = {}_nq^1_{xy} - {}_np_y \cdot {}_nq_x $$

PRIMER: Doživljenjsko zavarovanje za skupino dveh oseb starih x in y let, z izplačilom zavarovalnine v vrednosti 1 v trenutku smrti osebe stare x let, pri pogoju, da je takrat oseba stara y let še živa.

$$ \bar{A}^1_{xy} = \int_0^\infty ds \int_s^\infty v^s p_{T_xT_y}(s,t)dt = \int_0^\infty v^s\,{}_sp_y\,{}_sp_x\mu(x+s)ds $$

Splošni statusi

Status k-preživetja v skupini m oseb… status pri katerem skupina obstaja dokler je vsaj k oseb v tej skupini živih in propade ob $(m-k+1)$-ti smrti

$T_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}}$ … bodoča življenjska doba statusa k-preživetja

PRIMER: Doživljenjsko zavarovanje z izplačilom 1 v trenutku propada statusa k-preživetja in doživljenjska renta, ki se zvezno izplačuje v letni vrednosti 1 dokler status k-preživetja ne propade.

$$ \bar{A}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}}\,\mu_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}}(t)dt \qquad \bar{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}}dt $$

Za $k=0$ in poljuben $t \geq 0$ velja ${}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,0}} = 1$.

Status $[k]$**-preživetja v skupini** m **oseb**. . . status pri katerem skupina obstaja dokler je natanko k oseb v tej skupini živih, kar pomeni, da prične obstajati ob $(m-k)$-ti smrti v tej skupini in obstaja vse do naslednje smrti

$T_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{[k]}$ . . . bodoča življenjska doba statusa $[k]$-preživetja