AKTUARSKA MATEMATIKA

Življenjske rente

Marko Jakovac

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru
Slovenija

5.2 Zvezne življenjske rente

(1) DOŽIVLJENJSKA RENTA ZA PRIMER SMRTI. Trajanje rentnega zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica zvezno izplačuje rento v letni vrednosti 1 (namesto 1 lahko izberemo poljubno vrednost) do smrti osebe. Naključna spremenljivka

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}, \ \ T \geq 0.$$

opisuje neto sedanjo vrednost zvezne doživljenjske rente.

5.2 Zvezne življenjske rente

Matematičnemu upanju naključne spremenljivke Y prav tako pravimo **aktuarska sedanja vrednost** in jo lahko uporabimo za izračun enkratne neto premije za to življenjsko rento. Aktuarsko sedanjo vrednost poljubne zvezne življenjske rente označimo z $\bar{a}$. Pri tem rentnem zavarovanju je oznaka $\bar{a}_x$ in je enaka

$$\bar{a}_x = E(Y) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} \cdot {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t E_x dt.$$

Disperzija naključne spremenljivke Y je enaka

$$D(Y) = D(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{D\left(v^T\right)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}.$$

5.2 Zvezne življenjske rente

Opazimo lahko zvezo med aktuarsko sedanjo vrednostjo doživljenjske zvezne rente $\bar{a}_x$ in aktuarsko sedanjo vrednostjo doživljenjskega zavarovanja $\bar{A}_x$:

$$\bar{A}_x + \delta \cdot \bar{a}_x = 1 \quad \text{in} \quad {}^2\bar{A}_x + 2\delta \cdot {}^2\bar{a}_x = 1,$$

kjer ${}^2\bar{a}_x$ predstavlja aktuarsko sedanjo vrednost za doživljenjsko rento, računano z dvojno jakostjo obresti 2δ. Iz slednjih dveh formul lahko tudi disperzijo izrazimo s pomočjo aktuarskih sedanjih vrednosti življenjskih rent:

$$D(Y) = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\right) - (\bar{a}_x)^2.$$

5.2 Zvezne življenjske rente

(2) ŽIVLJENJSKA RENTA ZA PRIMER SMRTI. Trajanje rentnega zavarovanja: n **LET,** $n \in \mathbb{N}$**.**

Zavarovalnica zvezno izplačuje rento v letni vrednosti 1 do smrti osebe, če ta umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve rentnega zavarovanja. Če oseba umre po n letih, se renta izplača v celoti. Model za to rentno zavarovanje je enak

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & ; \quad T \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & ; \quad T > n \end{cases} .$$

5.2 Zvezne življenjske rente

Aktuarsko sedanjo vrednost te življenjske rente označimo z $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_t p_x \mu(x+t)dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x = \int_0^n v^t {}_t p_x dt.$$

Zveza med aktuarsko sedanjo vrednostjo življenjske zvezne rente $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ in aktuarsko sedanjo vrednostjo mešanega zavarovanja $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ je

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} + \delta \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|} = 1 \quad \text{in} \quad {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} + 2\delta \cdot {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 1.$$

Disperzija je enaka

$$D(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}\right) - (\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2.$$

5.2 Zvezne življenjske rente

(3) m-LET ODLOŽENA DOŽIVLJENJSKA RENTA, $m \in \mathbb{N}$. Trajanje rentnega zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica po m letih, $m \in \mathbb{N}$, prične zvezno izplačevati rento v letni vrednosti 1 do smrti osebe, če ta umre po m letih od sklenitve rentnega zavarovanja. Model za to rentno zavarovanje je enak

$$Y = \begin{cases} 0 & ; \quad T \leq m \\ v^m \cdot \bar{a}_{\overline{T-m}|} & ; \quad T > m \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; \quad T \leq m \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} & ; \quad T > m \end{cases}.$$

5.2 Zvezne življenjske rente

Aktuarsko sedanjo vrednost te življenjske rente označimo z ${}_{m|}\bar{a}_x$ in je enaka

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\bar{a}_x &= E(Y) = \int_m^\infty v^m \cdot \bar{a}_{\overline{t-m}|} \cdot {}_t p_x \mu(x+t)dt = {}_m E_x \cdot \bar{a}_{x+m} \\
&= E(Y_1) - E(Y_2) = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|},
\end{aligned}
$$

kjer sta Y_1 in Y_2 naključni spremenljivki za rentni zavarovanji pod točkama (1) in (2). Disperzija je enaka

$$
D(Y) = \frac{2}{\delta} v^{2m} {}_m p_x \left(\bar{a}_{x+m} - {}^2\bar{a}_{x+m} \right) - \left({}_{m|}\bar{a}_x \right)^2 .
$$

5.2 Zvezne življenjske rente

(4) n-LET SIGURNA DOŽIVLJENJSKA RENTA, $n \in \mathbb{N}$. Trajanje rentnega zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica zvezno izplačuje rento v letni vrednosti 1 do smrti osebe, če ta umre po n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve rentnega zavarovanja. Prvih n let se renta izplačuje ne glede na smrt osebe. Model za to rentno zavarovanje je enak

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & ; \quad T \leq n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} & ; \quad T > n \end{cases}.$$

5.2 Zvezne življenjske rente

Aktuarsko sedanjo vrednost te življenjske rente označimo z $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ in je enaka

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_tp_x \mu(x+t)dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

$$= \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t {}_tp_x dt = \bar{a}_{\overline{n}|} + (\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}),$$

Za izračun disperzije uporabimo njeno lastnost:

$$D(Y) = D(Y - \bar{a}_{\overline{n}|}) = D(Y_3),$$

kjer je Y_3 naključna spremenljivka za rentno zavarovanje pod točko (3).

5.3 Diskretne življenjske rente

(1) DOŽIVLJENJSKA RENTA ZA PRIMER SMRTI. Trajanje rentnega zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplačuje rento v vrednosti 1 na začetku/koncu vsakega leta do smrti osebe. Naključni spremenljivki

$$Y_1 = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} \qquad \text{in} \qquad Y_2 = a_{\overline{K|}}, \ K = 0, 1, 2, \ldots,$$

opisujeta neto sedanjo vrednost prenumerandne in postnumerandne doživljenjske rente.

5.3 Diskretne življenjske rente

Aktuarski sedanji vrednosti teh dveh življenjskih rent označimo z $\ddot{a}_x$ in a_x in sta enaki

$$\ddot{a}_x = E(Y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x,$$

$$a_x = E(Y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k}|} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Disperziji sta enaki

$$D(Y_1) = D(Y_2) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2}.$$

5.3 Diskretne življenjske rente

(2) ŽIVLJENJSKA RENTA ZA PRIMER SMRTI. Trajanje rentnega zavarovanja: n **LET,** $n \in \mathbb{N}$**.**

Zavarovalnica izplačuje rento v vrednosti 1 na začetku/koncu vsakega leta do smrti osebe, če ta umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve rentnega zavarovanja. Če oseba umre po n letih, se renta izplača v celoti. Modela za prenumerandno in postnumerandno rentno zavarovanje sta enaka

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases} ,$$

$$Y_2 = \begin{cases} a_{\overline{K|}} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ a_{\overline{n|}} & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases} .$$

5.3 Diskretne življenjske rente

Aktuarski sedanji vrednosti teh dveh življenjskih rent označimo z $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ in $a_{x:\overline{n}|}$ in sta enaki

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\,\overline{k+1}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \ddot{a}_{\,\overline{n}|} \cdot {}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x,$$

$$a_{x:\overline{n}|} = E(Y_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{\,\overline{k}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + a_{\,\overline{n}|} \cdot {}_np_x = \sum_{k=1}^{n} v^k\, {}_kp_x.$$

Disperziji za Y_1 in Y_2 sta enaki $D(Y_1) = D(Y_2) = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}$.

5.3 Diskretne življenjske rente

(3) m-LET ODLOŽENA DOŽIVLJENJSKA RENTA, $m \in \mathbb{N}$. Trajanje rentnega zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica po m letih, $m \in \mathbb{N}$, prične izplačevati rento v vrednosti 1 na začetku/koncu vsakega leta do smrti osebe, če ta umre po m letih od sklenitve rentnega zavarovanja. Modela za prenumerandno in postnumerandno rentno zavarovanje sta enaka

$$Y_1 = \begin{cases} 0 & ; \quad K = 0, 1, \ldots, m-1 \\ v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1-m}|} & ; \quad K = m, m+1, \ldots \end{cases},$$

$$Y_2 = \begin{cases} 0 & ; \quad K = 0, 1, \ldots, m-1 \\ v^m \cdot a_{\overline{K-m}|} & ; \quad K = m, m+1, \ldots \end{cases}.$$

5.3 Diskretne življenjske rente

Aktuarski sedanji vrednosti teh dveh življenjskih rent označimo z ${}_{m|}\ddot{a}_x$ in ${}_{m|}a_x$ in sta enaki

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\ddot{a}_x &= E(Y_1) = \sum_{k=m}^{\infty} v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{k+1-m|}} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m}, \\
{}_{m|}a_x &= E(Y_2) = \sum_{k=m}^{\infty} v^m \cdot a_{\overline{k-m|}} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_mE_x \cdot a_{x+m}.
\end{aligned}
$$

5.3 Diskretne življenjske rente

(4) n-LET SIGURNA DOŽIVLJENJSKA RENTA, $n \in \mathbb{N}$. Trajanje rentnega zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplačuje rento v vrednosti 1 na začetku/koncu vsakega leta do smrti osebe, če ta umre po n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve rentnega zavarovanja. Prvih n let se renta izplačuje ne glede na smrt osebe. Modela za prenumerandno in postnumerandno rentno zavarovanje sta enaka

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases},$$

$$Y_2 = \begin{cases} a_{\overline{n}|} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ a_{\overline{K}|} & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases}.$$

5.3 Diskretne življenjske rente

Aktuarski sedanji vrednosti teh dveh življenjskih rent označimo z $\ddot{a}_{\overline{x:n}|}$ in $a_{\overline{x:n}|}$ in sta enaki

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = E(Y_1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\
&= \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x, \\
a_{\overline{x:n}|} = E(Y_2) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{n}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \sum_{k=n}^{\infty} a_{\overline{k}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\
&= a_{\overline{n}|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_kp_x.
\end{aligned}$$