AKTUARSKA MATEMATIKA

Življenjska zavarovanja

Marko Jakovac

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru
Slovenija

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(1) ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: n **LET,** $n \in \mathbb{N}$**.**

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 (namesto 1 lahko izberemo poljubno vrednost) v trenutku smrti, če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = \begin{cases} 1 & ; \quad t \leq n \\ 0 & ; \quad t > n \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t}, \; t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} v^T & ; \quad T \leq n \\ 0 & ; \quad T > n \end{cases} .$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Matematičnemu upanju naključne spremenljivke Z pravimo **aktuarska sedanja vrednost** in jo lahko uporabimo za izračun enkratne neto premije. Aktuarsko sedanjo vrednost poljubnega življenjskega zavarovanja označimo z $\bar{A}$. Pri tem zavarovanju je oznaka $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \int_0^n v^t p_T(t)dt = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x \mu(x+t)dt.$$

Podobno lahko za vsak $j \geq 1$ izračunamo $E(Z^j)$:

$$E(Z^j) = \int_0^n (v^t)^j p_T(t)dt = \int_0^n e^{-(j\delta)t} {}_tp_x \mu(x+t)dt.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Disperzija naključne spremenljivke Z je enaka

$$
\begin{aligned}
D(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\
&= \int_0^n e^{-(2\delta)t} {}_t p_x \mu(x+t) dt - \left(\int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt \right)^2 \\
&= {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2,
\end{aligned}
$$

kjer ${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ predstavlja aktuarsko sedanjo vrednost za življenjsko zavarovanje v primeru smrti za obdobje n let, računano z dvojno jakostjo obresti 2δ.

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(2) DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 v trenutku smrti. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = 1,\ t \geq 0, \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t},\ t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = v^T,\ T \geq 0.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja označimo z $\bar{A}_x$ in je enaka

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty v^t p_T(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, {}_tp_x \mu(x+t)dt.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \int_0^\infty e^{-(2\delta)t}\, {}_tp_x \mu(x+t)dt - \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\, {}_tp_x \mu(x+t)dt\right)^2 = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

Opazimo: $\lim_{n\to\infty} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_x$.

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(3) ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA DOŽIVETJE. Trajanje zavarovanja: n LET, $n \in \mathbb{N}$.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1, če oseba preživi n let, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = \begin{cases} 0 & ; \quad t \leq n \\ 1 & ; \quad t > n \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_t = v^n = e^{-\delta n} = \text{konst.}, \ t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} 0 & ; \quad T \leq n \\ v^n & ; \quad T > n \end{cases}.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Življenjsko zavarovanje za doživetje lahko definiramo tudi s pomočjo naključne spremenljivke indikator:

$$Z = v^n I,$$

kjer je $I = 1$ dogodek, da oseba stara x let preživi naslednjih n let, $I = 0$ pa dogodek, da prej umre.

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost zavarovanja za doživetje označimo z $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ in je enaka

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E(Z) = E(v^n I) = v^n E(I) = v^n {}_n p_x.$$

Disperzija je enaka

$$\begin{aligned} D(Z) &= D(v^n I) = v^{2n} D(I) = v^{2n} {}_n p_x {}_n q_x \\ &= v^{2n} {}_n p_x (1 - {}_n p_x) \\ &= v^{2n} {}_n p_x - v^{2n} ({}_n p_x)^2 \\ &= {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^2. \end{aligned}$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(4) MEŠANO ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE. Trajanje zavarovanja: n LET, $n \in \mathbb{N}$.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 v trenutku smrti, če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Prav tako zavarovalnica zagotavlja izplačilo zavarovalne vsote 1, če oseba preživi n let. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = 1,\ t \geq 0, \qquad \text{in} \qquad v_t = \begin{cases} v^t & ; \quad t \leq n \\ v^n & ; \quad t > n \end{cases}.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} v^T & ; \quad T \leq n \\ v^n & ; \quad T > n \end{cases}.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Za izračun aktuarske sedanje vrednosti in disperzije si pomagamo z naključnimi spremenljivkami Z_1, Z_3 in Z_4 , ki po vrsti predstavljajo zavarovanja pod zaporednimi številkami (1-za primer smrti), (3-za doživetje) in (4-mešano):

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & ; \quad T \leq n \\ 0 & ; \quad T > n \end{cases}, \qquad Z_3 = \begin{cases} 0 & ; \quad T \leq n \\ v^n & ; \quad T > n \end{cases},$$

$$Z_4 = \begin{cases} v^T & ; \quad T \leq n \\ v^n & ; \quad T > n \end{cases}.$$

Iz definicij vseh treh modelov sledi

$$Z_4 = Z_1 + Z_3.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost mešanega zavarovanja označimo z $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E(Z_4) = E(Z_1 + Z_3) = E(Z_1) + E(Z_3) = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z_4) = D(Z_1 + Z_3) = D(Z_1) + D(Z_3) + 2\mathrm{Kov}(Z_1, Z_3),$$

kjer je

$$\mathrm{Kov}(Z_1, Z_3) = E(Z_1 Z_3) - E(Z_1)E(Z_3).$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Ob upoštevanju $Z_1 Z_3 = 0$, $t \geq 0$, dobimo

$$\mathrm{Kov}(Z_1, Z_3) = E(0) - E(Z_1)E(Z_3) = -E(Z_1)E(Z_3) = -\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Dobimo, da je disperzija enaka

$$\begin{aligned} D(Z) = D(Z_4) &= {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2 + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^2 - 2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\ &= {}^2A^1_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^2 \\ &= {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2. \end{aligned}$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(5) m-LET ODLOŽENO DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE, $m \in \mathbb{N}$.
Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 v trenutku smrti, če oseba umre po m letih, $m \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = \begin{cases} 0 & ; \quad t \leq m \\ 1 & ; \quad t > m \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t}, \; t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} 0 & ; \quad T \leq m \\ v^T & ; \quad T > m \end{cases} .$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja označimo z ${}_{m|}\bar{A}_x$ in je enaka

$$ {}_{m|}\bar{A}_x = E(Z) = \int_m^\infty v^t p_T(t)dt = \int_m^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x \mu(x+t)dt. $$

Disperzija je enaka

$$ \begin{aligned} D(Z) &= \int_m^\infty e^{-(2\delta)t}\,{}_tp_x \mu(x+t)dt - \left(\int_m^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x \mu(x+t)dt \right)^2 \\ &= {}_{m|}{}^2\bar{A}_x - ({}_{m|}\bar{A}_x)^2. \end{aligned} $$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(6) LETNO NARAŠČAJOČE DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 v primeru smrti v prvem letu, 2 v primeru smrti v drugem letu, 3 v primeru smrti v tretjem letu, itd. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = [t+1],\ t \geq 0, \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t},\ t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = [T+1]v^T,\ T \geq 0.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost letno naraščajočega doživljenjskega zavarovanja označimo z $(I\bar{A})_x$ in je enaka

$$(I\bar{A})_x = E(Z) = \int_0^\infty [t+1] v^t p_T(t) dt = \int_0^\infty [t+1] e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \int_0^\infty [t+1]^2 e^{-(2\delta)t} {}_t p_x \mu(x+t) dt - \left(\int_0^\infty [t+1] e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt \right)^2.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(7) ZVEZNO NARAŠČAJOČE DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica v primeru smrti v času $t \geq 0$ izplača zavarovalno vsoto t. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = t,\ t \geq 0, \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t},\ t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = Tv^T,\ T \geq 0.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost zvezno naraščajočega doživljenjskega zavarovanja označimo z $(\bar{I}\bar{A})_x$ in je enaka

$$(\bar{I}\bar{A})_x = E(Z) = \int_0^\infty t v^t p_T(t)dt = \int_0^\infty t e^{-\delta t}\, {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty {}_{s|}\bar{A}_x ds.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \int_0^\infty t^2 e^{-(2\delta)t}\, {}_t p_x \mu(x+t)dt - \left(\int_0^\infty t e^{-\delta t}\, {}_t p_x \mu(x+t)dt\right)^2.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(8) LETNO PADAJOČE ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: n LET, $n \in \mathbb{N}$.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto n v primeru smrti v prvem letu, $n-1$ v primeru smrti v drugem letu, $n-2$ v primeru smrti v tretjem letu, itd., če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = \begin{cases} n-[t] & ; \quad t \leq n \\ 0 & ; \quad t > n \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t}, \ t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} (n-[T])v^T & ; \quad T \leq n \\ 0 & ; \quad T > n \end{cases} .$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost letno padajočega življenjskega zavarovanja označimo z $(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \int_0^n (n-[t])v^t p_T(t)dt = \int_0^n (n-[t])e^{-\delta t}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \int_0^n (n-[t])^2 e^{-(2\delta)t}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt - \left(\int_0^n (n-[t])e^{-\delta t}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt\right)^2.$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

(9) ZVEZNO PADAJOČE ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: n LET, $n \in \mathbb{N}$.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto $n - t$, če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_t in v_t za to zavarovanje:

$$b_t = \begin{cases} n - t & ; \quad t \leq n \\ 0 & ; \quad t > n \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_t = v^t = e^{-\delta t}, \ t \geq 0.$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} (n - T)v^T & ; \quad T \leq n \\ 0 & ; \quad T > n \end{cases} .$$

4.2 Zavarovanja z izplačilom v trenutku smrti

Aktuarsko sedanjo vrednost zvezno padajočega življenjskega zavarovanja označimo z $(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \int_0^n (n-t)v^t p_T(t)dt = \int_0^n (n-t)e^{-\delta t}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \int_0^n (n-t)^2 e^{-(2\delta)t}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt - \left(\int_0^n (n-t)e^{-\delta t}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt\right)^2.$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(1) ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: n **LET,** $n \in \mathbb{N}$**.**

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 ob koncu leta smrti, če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_{k+1} in v_{k+1} za to zavarovanje:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & ; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & ; \quad k = n, n+1, \ldots \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_{k+1} = v^{k+1}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases} .$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja označimo z $A^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K=k) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Disperzija je enaka

$$\begin{aligned} D(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \right)^2 \\ &= {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2. \end{aligned}$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Pri zavarovanjih z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja (zavarovanjih z diskretnim časom) lahko izpeljemo različne rekurzivne formule za izračun aktuarske sedanje vrednosti. Npr.: za vsako starost x velja

$$A^1_{x:\overline{n}|} = v\,q_x + v\,p_x A^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \text{in} \qquad A^1_{x:\overline{0}|} = 0.$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(2) DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 ob koncu leta, v katerem oseba umre. Definirajmo funkciji b_{k+1} in v_{k+1} za to zavarovanje:

$$b_{k+1} = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{in} \quad v_{k+1} = v^{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = v^{K+1},\ K = 0, 1, 2, \ldots$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja označimo z A_x in je enaka

$$A_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Disperzija je enaka

$$\begin{aligned} D(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \right)^2 \\ &= {}^2A_x - (A_x)^2. \end{aligned}$$

Opazimo: $\lim_{n\to\infty} A^1_{x:\overline{n}|} = A_x$.

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Rekurzivno formulo

$$A^1_{x:\overline{n}|} = v\,q_x + v\,p_x A^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|},\; n \in \mathbb{N}, \quad \text{in} \quad A^1_{x:\overline{0}|} = 0.$$

lahko posplošimo na rekurzivno formulo

$$A_x = v\,q_x + v\,p_x A_{x+1},\; \text{za poljubno starost } x \text{ let.}$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(3) ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA DOŽIVETJE. Trajanje zavarovanja: n LET, $n \in \mathbb{N}$.

Definicija življenjskega zavarovanja za doživetje z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja je enaka definiciji življenjskega zavarovanja za doživetje z izplačilom v trenutku smrti.

Razlog je, da v primeru doživetja izplačilo v vsakem primeru nastopi natanko $n \in \mathbb{N}$ let po sklenitvi zavarovanja.

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(4) MEŠANO ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE. Trajanje zavarovanja: n **LET,** $n \in \mathbb{N}$**.**

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 ob koncu leta smrti, če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Prav tako zavarovalnica zagotavlja izplačilo zavarovalne vsote 1, če oseba preživi n let. Definirajmo funkciji b_{k+1} in v_{k+1} za to zavarovanje:

$$b_{k+1} = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{in} \qquad v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1} & ; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n & ; \quad k = n, n+1, \ldots \end{cases} .$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases} .$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja označimo z $A_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$A_{x:\overline{n}|} = E(Z) = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_k p_x \cdot q_{x+k} + v^n{}_n p_x .$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2 .$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(5) m-LET ODLOŽENO DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE, $m \in \mathbb{N}$. Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 ob koncu leta smrti, če oseba umre po m letih, $m \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_{k+1} in v_{k+1} za to zavarovanje:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 0 & ; \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ 1 & ; \quad k = m, m+1, \ldots \end{cases} \qquad \text{in} \qquad v_{k+1} = v^{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} 0 & ; \quad K = 0, 1, \ldots, m-1 \\ v^{K+1} & ; \quad K = m, m+1, \ldots \end{cases} .$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Aktuarsko sedanjo vrednost tega zavarovanja označimo z ${}_{m|}A_x$ in je enaka

$$ {}_{m|}A_x = E(Z) = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K=k) = \sum_{k=m}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_kp_x \cdot q_{x+k}. $$

Disperzija je enaka

$$ \begin{aligned} D(Z) &= \sum_{k=m}^{\infty} e^{-2\delta(k+1)} {}_kp_x \cdot q_{x+k} - \left(\sum_{k=m}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_kp_x \cdot q_{x+k} \right)^2 \\ &= {}_{m|}{}^2A_x - ({}_{m|}A_x)^2. \end{aligned} $$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(6) LETNO NARAŠČAJOČE DOŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: do smrti.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto 1 ob koncu prvega leta smrti, 2 ob koncu drugega leta smrti, 3 ob koncu tretjega leta smrti, itd. Definirajmo funkciji b_{k+1} in v_{k+1} za to zavarovanje:

$$b_{k+1} = k+1,\ k = 0,1,2,\ldots, \quad \text{in} \quad v_{k+1} = v^{k+1},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = (K+1)v^{K+1},\ K = 0,1,2,\ldots$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Aktuarsko sedanjo vrednost letno naraščajočega doživljenjskega zavarovanja označimo z $(IA)_x$ in je enaka

$$(IA)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-2\delta(k+1)}{}_k p_x \cdot q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-\delta(k+1)}{}_k p_x \cdot q_{x+k}\right)^2$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

(7) LETNO PADAJOČE ŽIVLJENJSKO ZAVAROVANJE ZA PRIMER SMRTI. Trajanje zavarovanja: n LET, $n \in \mathbb{N}$.

Zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto n ob koncu prvega leta smrti, $n-1$ ob koncu drugega leta smrti, $n-2$ ob koncu tretjega leta smrti, itd., če oseba umre prej kot v n letih, $n \in \mathbb{N}$, od sklenitve zavarovanja. Definirajmo funkciji b_{k+1} in v_{k+1} za to zavarovanje:

$$b_{k+1} = \begin{cases} n-k & ; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & ; \quad k = n, n+1, \ldots \end{cases} \quad \text{in} \quad v_{k+1} = v^{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Model za to zavarovanje je enak

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1} & ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & ; \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases} .$$

4.3 Zavarovanja z izplačilom ob koncu obrestovanega obdobja, v katerem je nastopila smrt

Aktuarsko sedanjo vrednost letno padajočega življenjskega zavarovanja označimo z $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$ in je enaka

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Disperzija je enaka

$$D(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 e^{-2\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \right)^2$$