Vaje 8: Povezanost grafov

1. Dokažite, da za 3-regularne grafe velja: $\kappa(G) = \lambda(G)$.

2. Naj bo G graf z n vozlišči, za katerega velja: $\delta(G) \geq n-2$.

   (a) Dokažite, da za graf G velja: $\kappa(G) = \delta(G)$.

   (b) Za vsako naravno število $n \geq 5$ konstruirajte graf G z n vozlišči, za katerega velja: $\delta(G) = n-3$ in $\kappa(G) < \delta(G)$.

3. Naj bo $G_{n,2k}$, Harary-jev graf.
   Opomba: Harary-jev graf $G_{n,2k}$ je graf, kjer vozlišča predstavljajo oglišča n-kotnika, vsako vozlišče pa je povezano s k zaporedni vozlišči na svoji levi strani in s k zaporednimi vozlišči na svoji desni strani.
   Dokažite, da je $\kappa(G_{n,2k}) = 2k$.

4. Naj bosta G_1 in G_2 k-povezana grafa ter $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$ takšni vozlišči, da je $\deg_{G_1}(v_1) = \deg_{G_2}(v_2) = k$.
   Iz disjunktnih kopij grafov G_1 in G_2 tvorimo graf H tako, da najprej iz grafa G_1 odstranimo vozlišče v_1 (in vse povezave s krajiščem v_1), nato iz G_2 odstranimo vozlišče v_2 (in vse povezave s krajiščem v_2), na koncu pa grafu dodamo poljubnih k povezav tako, da ima vsako vozlišče iz $N_{G_1}(v_1)$ natanko enega soseda v $N_{G_2}(v_2)$ ter vsako vozlišče iz $N_{G_2}(v_2)$ natanko enega soseda v $N_{G_1}(v_1)$ (dodane povezave predstavljajo prirejanje).
   Dokažite, da je poljuben graf H, tvorjen na opisani način, $(k-1)$-povezan graf.

5. Naj bo G graf in $xy \in E(G)$. Dokažite: $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - xy) \leq \kappa(G)$.

6. Naj bo G graf, ki ne vsebuje podgrafov, izomorfnih grafu K_3, in naj bo $\delta(G) \geq 3$. Dokažite naslednjo trditev. Če je $|V(G)| \leq 11$, potem je $\lambda(G) \geq 3$.

7. Naj bosta G in H poljubna grafa.
   Dokažite: $\lambda(G \Box H) \leq min\{\lambda(G) \cdot |V(H)|, \lambda(H) \cdot |V(G)|, \delta(G) + \delta(H)\}$.