

# 1 $\lambda(T_{3,m})$

## 1.1 14- $L(3, 2, 1)$ -labeling of $T_{3,5}$

```
7 4 1 13 10
2 14 11 8 5
12 9 6 3 0
```

## 1.2 16- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{3,m}$ for $m = 3, 4, 6, 7, 9, 11$

$\lambda(T_{3,3}) \leq 16$

```
4 16 12
10 0 6
14 8 2
```

$\lambda(T_{3,4}) \leq 16$

```
12 1 4 15
9 16 13 6
3 7 10 0
```

$\lambda(T_{3,6}) \leq 16$

```
2 8 0 10 4 12
10 16 6 14 8 0
14 4 12 2 16 6
```

$\lambda(T_{3,7}) \leq 16$

```
16 3 11 5 0 7 13
10 6 1 13 9 15 2
0 14 8 16 3 11 5
```

### 1.3 15- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{3,m}$ for $m = 8, 13, 14, 17, 19$

$\lambda(T_{3,8}) \leq 15$

```
5 9 12 4 8 11 15 2
11 14 1 10 13 0 4 7
0 3 7 15 2 6 9 13
```

$\lambda(T_{3,13}) \leq 15$

```
11 8 5 12 3 0 7 4 12 8 0 13 4
6 3 15 1 9 5 13 10 1 14 5 2 9
0 13 10 7 14 11 2 15 6 3 10 7 15
```

$\lambda(T_{3,14}) \leq 15$

```
14 1 8 5 2 12 15 8 11 4 1 15 5 11
9 6 3 11 14 7 10 3 0 14 7 10 13 2
4 12 15 0 9 4 1 13 6 9 12 3 0 7
```

$\lambda(T_{3,17}) \leq 15$

```
4 15 6 9 2 15 8 11 4 7 0 3 13 10 7 14 1
13 10 0 14 11 5 13 1 15 12 5 8 1 4 12 9 6
8 2 12 4 7 0 3 6 9 2 14 11 6 15 0 3 11
```

$\lambda(T_{3,19}) \leq 15$

```
7 13 3 6 1 15 5 8 12 1 5 11 14 4 10 0 8 14 4
15 5 8 11 4 7 10 0 3 15 8 0 6 12 15 5 11 1 9
2 10 0 14 9 12 2 14 6 10 13 3 9 1 7 13 3 6 12
```

### 1.4 Patterns that give 15- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{3,m}$

$B_0$ :

```
5 9 12 4 8 11 15 2
11 14 1 10 13 0 4 7
0 3 7 15 2 6 9 13
```

$B_1$ :

```
5 8 1 14 11 5 13 1 4 12 0 8 11 14 7 10 13
11 3 6 9 2 15 8 11 14 7 10 13 6 3 0 15 2
0 15 12 4 7 0 3 6 9 2 15 4 1 9 12 4 8
```

$B_2$ :

```
5 14 1 9 13 0 3 6 15 2
10 3 6 15 2 5 9 12 4 8
0 8 12 4 7 11 14 1 10 13
```

$B_3$ :

```
5 9 12 15 0 3 9 12 15 5 11 14 4 7 13 3 6 12 2
11 14 1 4 8 11 14 7 2 13 8 1 12 15 0 8 14 4 7
0 3 7 10 13 6 1 4 10 0 3 6 9 2 5 11 1 9 15
```

$B_4$ :

```
5 8 1 4 12 15 2 6 14 1 10 13
10 15 6 9 0 5 8 11 3 7 15 2
8 3 11 14 7 10 13 0 9 12 4 8
```

$B_5$ :

```
5 9 12 15 3 11 1 15 5 8 12 15 2
11 14 1 5 8 14 4 7 10 14 1 4 8
0 3 7 10 0 6 9 12 0 3 6 10 13
```

$B_6$ :

```
5 9 12 15 0 6 14 4 10 13 3 6 12 2
11 14 1 5 8 11 1 7 15 0 8 14 4 7
0 3 7 10 13 3 9 12 2 5 11 1 9 15
```

$B_7$ :

```
5 8 1 4 13 0 3 12 15 8 11 3 7 10 2
11 14 6 10 2 5 9 1 4 13 0 9 12 15 8
0 3 12 15 8 11 14 7 10 2 6 14 1 4 13
```

## 2 $\lambda(T_{4,m})$

### 2.1 Patterns that give 12- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{4,m}$

$F_0$ :

```
10 3 12 1 8 5
7 0 9 4 11 2
4 11 2 7 0 9
1 8 5 10 3 12
```

$E_0$ :

```
9 4 11 6 0 8 3 10 5 12 7 1
12 7 1 9 4 11 6 0 8 2 10 5
2 10 5 12 7 1 9 4 11 6 0 8
6 0 8 3 10 5 12 7 1 9 4 11
```

$E_1$ :

```
9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 5 12 7 1
12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 3 10 5
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 4 11 6 0 8
6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 4 11
```

$E_2$ :

```
9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1
12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8
6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11
```

$E_3$ :

```
9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1
12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8
6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11
```

$E_4$ :

```
9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1
12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8
6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11
```

$E_5$ :

9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 11 5 0 8 2 10 4 12 7 1  
12 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 12 6 1 9 3 11 5 0 8 2 10 5  
3 10 5 12 7 0 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 10 4 12 6 1 9 3 11 6 0 8  
6 0 8 3 10 5 12 7 2 9 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 10 4 12 7 1 9 3 11

$E_7$ :

1 9 3 11 5 0 7 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1  
5 12 7 1 9 3 11 5 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5  
8 2 10 4 12 6 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8  
11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11

$E_8$ :

9 3 11 5 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1  
12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 5  
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8  
6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11

$E_9$ :

9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1  
12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5  
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8  
6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11

$E_{10}$ :

9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 10 4 12 6 1 9 3 11 6 0 8 2 10 5 12 7 2 9 4 11 6 1 8 3 11 5 0 7 2 10 4 12 6 1 9 3 11 5 0 8 2 10 4 12 7 1  
12 7 2 9 4 11 6 1 8 3 11 5 0 7 2 10 4 12 7 1 9 3 11 6 0 8 3 10 5 12 7 2 9 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 10 4 12 6 1 9 3 11 5 0 8 2 10 5  
3 10 5 12 7 2 9 4 12 6 1 8 3 11 5 0 8 2 10 4 12 7 1 9 4 11 6 0 8 3 10 5 0 7 2 9 4 12 6 1 9 3 11 5 0 7 2 10 4 12 6 1 9 3 11 6 0 8  
6 0 8 3 10 5 0 7 2 9 4 12 6 1 9 3 11 5 0 8 2 10 5 12 7 1 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 10 4 12 6 1 8 3 11 5 0 7 2 10 4 12 7 1 9 3 11

$E_{11}$ :

9 4 11 6 1 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 12 6 1 8 3 11 5 0 8 2 10 4 12 7 1  
12 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 12 6 1 9 3 11 5 0 8 2 10 5  
3 10 5 12 7 2 9 4 11 6 0 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 0 7 2 10 4 12 6 1 9 3 11 6 0 8  
6 0 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 6 1 8 3 11 5 0 7 2 10 4 12 7 1 9 3 11

## 2.2 13- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{4,m}$ for $m = 22, 23, 27, 33$

$\lambda(T_{4,22}) \leq 13$

```

9 0 3 12 5 8 1 10 5 0 3 12 9 6 1 12 5 8 13 2 11 6
4 11 6 9 0 11 4 13 2 11 8 5 0 11 8 3 10 1 4 7 0 13
7 2 13 4 7 2 9 0 7 4 13 10 7 2 5 0 13 6 9 12 3 10
12 5 8 1 10 13 6 3 12 9 6 1 4 13 10 7 2 11 0 5 8 1

```

$\lambda(T_{4,23}) \leq 13$

```

5 12 3 8 1 12 3 10 5 8 13 6 11 2 9 0 7 4 12 2 10 0 8
2 7 0 11 4 9 6 1 12 3 10 1 8 5 13 3 11 1 9 6 13 4 11
13 4 9 2 7 0 11 4 9 0 7 12 3 10 1 8 5 13 3 11 1 9 6
10 1 6 13 10 5 8 13 2 11 4 9 0 7 4 12 2 10 0 8 5 12 3

```

$\lambda(T_{4,27}) \leq 13$

```

0 11 2 13 8 5 0 7 2 9 4 12 6 0 8 2 11 4 13 0 9 2 11 6 13 2 9
13 8 5 10 1 12 3 10 5 13 7 2 9 4 12 6 0 9 2 11 6 13 0 9 4 11 6
10 1 12 7 4 9 6 1 8 3 10 5 13 7 1 10 3 12 5 8 1 10 3 12 7 0 3
7 4 9 0 11 2 13 4 11 6 0 8 3 11 5 13 7 1 10 3 12 5 8 1 10 5 12

```

$\lambda(T_{4,33}) \leq 13$

```

3 12 5 0 7 2 9 12 5 0 7 10 5 2 7 0 13 10 5 2 7 10 3 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9
6 1 8 3 12 5 0 7 10 3 12 1 8 13 10 3 6 1 8 11 0 13 6 9 4 11 6 13 8 2 10 4 13
10 4 13 6 1 8 11 4 13 6 9 4 11 6 1 8 11 4 13 6 3 8 11 2 13 0 9 4 11 6 0 8 2
0 7 2 10 4 13 6 1 8 11 2 13 0 9 12 5 2 7 0 9 12 5 0 7 10 5 12 7 1 9 3 11 5

```

## 2.3 11- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{4,12}$

$\lambda(T_{4,12}) \leq 11$

```

10 5 0 7 2 9 4 11 6 1 8 3
1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 11 6
4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9
7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0

```

## 2.4 12- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{4,m}$ for $m = 19, 25, 26, 29, 32, 35, 45, 51, 58$

$\lambda(T_{4,19}) \leq 12$

```
11 6 0 8 2 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4
8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1
5 12 7 1 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10
2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 7 1 9 3 11 5 0 7
```

$\lambda(T_{4,25}) \leq 12$

```
5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10
1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 12 7
11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4
8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 12 5 0 7 2 9 4 11 6 0
```

$\lambda(T_{4,26}) \leq 12$

```
12 5 10 3 8 1 6 12 4 10 2 8 0 6 11 4 9 2 7 0 5 11 3 9 1 7
2 8 0 6 11 4 9 2 7 0 5 11 3 9 1 7 12 5 10 3 8 1 6 12 4 10
6 11 4 9 2 7 0 5 11 3 9 1 7 12 5 10 3 8 1 6 12 4 10 2 8 0
9 1 7 12 5 10 3 8 1 6 12 4 10 2 8 0 6 11 4 9 2 7 0 5 11 3
```

$\lambda(T_{4,29}) \leq 12$

```
5 10 2 8 0 5 11 3 9 1 6 12 4 9 2 7 0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 1 7 12
1 7 12 4 10 2 8 0 5 11 3 8 1 6 12 4 9 2 7 0 5 10 3 8 0 6 11 4 9
11 3 9 1 7 12 4 10 2 7 0 5 11 3 8 1 6 12 4 9 2 7 12 5 10 3 8 0 6
8 0 6 11 3 9 1 6 12 4 10 2 7 0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 2 7 12 5 10 2
```

$\lambda(T_{4,32}) \leq 12$

```
11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4
2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7
5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10
8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 1
```

$\lambda(T_{4,35}) \leq 12$

```
10 3 8 0 6 11 3 9 1 7 12 4 10 2 7 0 5 11 3 8 1 6 11 4 9 2 7 0 11 4 9 2 7 12 5
0 6 11 4 9 1 7 12 4 10 2 8 0 5 11 3 8 1 6 12 4 9 2 7 0 11 4 9 2 7 12 5 10 3 8
4 9 1 7 12 5 10 2 8 0 5 11 3 9 1 6 12 4 9 2 7 0 5 10 3 8 1 12 5 10 3 8 0 6 11
7 12 5 10 2 8 0 6 11 3 9 1 6 12 4 10 2 7 0 5 10 3 8 1 12 5 10 3 8 1 6 11 4 9 1
```

$$\lambda(T_{4,45}) \leq 12$$

5 0 7 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11  
2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7  
12 6 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4  
9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1

$$\lambda(T_{4,51}) \leq 12$$

7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0  
11 5 0 7 2 9 4 11 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3  
1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10 4 12 6  
4 12 6 1 8 3 10 5 12 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 10 4 12 6 1 8 3 10 5 12 7 1 9 3 11 5 0 7 2 9 4 11 6 0 8 2 10

$$\lambda(T_{4,58}) \leq 45$$

8 0 5 11 3 9 1 6 12 4 9 2 7 0 5 10 3 8 0 6 11 4 9 1 7 12 4 10 2 8 0 5 11 3 8 1 6 12 4 9 2 7 0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 1 7 12 5 10 2  
11 3 9 1 6 12 4 10 2 7 0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 1 7 12 5 10 2 8 0 5 11 3 9 1 6 12 4 10 2 7 0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 2 7 12 5 10 2 8 0 6  
1 7 12 4 10 2 7 0 5 11 3 8 1 6 11 4 9 2 7 12 5 10 2 8 0 6 11 3 9 1 6 12 4 10 2 7 0 5 11 3 8 1 6 11 4 9 0 7 12 5 10 3 8 0 6 11 3 9  
4 10 2 8 0 5 11 3 8 1 6 12 4 9 2 7 12 5 10 3 8 0 6 11 3 9 1 7 12 4 10 2 7 0 5 11 3 8 1 6 12 4 9 2 7 12 5 10 3 8 0 6 11 4 9 1 7 12

### 3 $\lambda(T_{5,m})$

#### 3.1 Patterns that give 15- $L(3,2,1)$ -labelings of $T_{5,m}$

$G_0$ :

11 0 5 14 3 8 1 6 15 4 13 2  
14 3 8 1 6 11 4 9 2 7 0 5  
1 6 12 4 9 15 7 12 5 10 3 8  
4 9 15 7 13 2 10 0 8 14 6 12  
7 13 2 11 0 5 14 3 11 1 9 15

$G_1$ :

11 0 15 7 3 9 1 13 5 11 3 9 14 7 12 5 10 3 8 1 6 15 4 13 2  
14 3 9 1 13 5 11 3 9 14 7 12 1 10 15 8 13 6 11 4 9 2 7 0 5  
1 6 12 4 10 2 14 6 12 1 10 15 5 13 3 11 0 9 14 7 12 5 10 3 8  
4 10 2 14 6 12 8 0 15 4 13 2 8 0 6 14 4 12 2 10 0 8 14 6 12  
7 13 5 11 0 15 4 10 2 8 0 6 11 4 9 1 7 15 5 13 3 11 1 9 15



$G_2$ :

```
10 0 5 14 3 8 1 6 11 4 9 14 7 12 4 10 2 14 6 12 8 0 15 4 13 2
14 3 8 1 6 11 4 9 14 7 12 1 10 15 8 13 5 11 0 15 4 10 2 7 0 5
1 6 11 4 9 14 7 12 1 10 15 4 13 2 11 0 15 7 3 9 1 13 5 11 3 8
4 9 15 7 12 2 10 15 5 13 2 8 0 5 14 3 9 1 13 5 11 3 9 14 6 12
7 13 2 10 0 5 13 3 8 0 6 11 3 9 1 6 12 4 10 2 14 6 12 1 10 15
```

$G_3$ :

```
7 0 5 10 3 8 14 6 12 1 9 15 7 13 2
10 3 8 13 6 11 1 9 15 4 13 2 10 0 5
14 6 11 1 9 15 4 13 2 7 0 5 14 3 8
1 9 15 4 12 2 7 0 5 11 3 8 1 6 12
4 13 2 7 0 5 10 3 8 14 6 12 4 9 15
```

$G_4$ :

```
11 0 9 14 7 12 5 10 3 8 1 6 15 4 13 2
14 3 12 1 10 15 8 13 6 11 4 9 2 7 0 5
1 6 15 4 13 2 11 0 9 14 7 12 5 10 3 8
4 10 2 8 0 6 14 4 12 2 10 0 8 14 6 12
7 13 5 11 3 9 1 7 15 5 13 3 11 1 9 15
```

$G_5$ :

```
11 0 8 14 3 11 1 9 14 7 12 5 10 15 8 1 6 11 4 9 14 7 12 1 10 15 4 13 2
14 3 12 1 6 15 4 12 2 10 15 8 13 6 11 4 9 14 7 12 1 10 15 4 13 2 7 0 5
1 6 15 4 9 2 7 0 5 13 3 11 1 9 14 7 12 1 10 15 4 13 2 8 0 5 11 3 8
4 9 2 7 12 5 10 15 8 1 6 14 4 12 0 10 15 5 13 2 8 0 6 11 3 9 14 6 12
7 13 5 10 0 8 13 6 11 4 9 0 7 2 5 13 3 8 0 6 11 3 9 14 7 12 1 10 15
```

$G_6$ :

```
11 0 15 7 3 9 1 13 5 11 3 9 1 6 15 4 13 2
14 3 9 1 13 5 11 3 9 14 6 12 4 10 2 7 0 5
1 6 12 4 10 2 14 6 12 1 10 15 8 13 5 11 3 8
4 10 2 14 6 12 8 0 15 4 13 2 11 0 9 14 6 12
7 13 5 11 0 15 4 10 2 8 0 5 14 3 12 1 10 15
```

$G_7$ :

```
11 0 9 14 7 12 5 10 15 8 13 3 11 1 6 15 4 13 2
14 3 12 1 10 15 8 13 3 11 1 6 14 4 9 2 7 0 5
1 6 15 4 13 2 11 0 6 14 4 9 2 7 12 5 10 3 8
4 10 2 8 0 6 14 4 9 2 7 12 5 10 0 8 14 6 12
7 13 5 11 3 9 1 7 12 5 10 15 8 13 3 11 1 9 15
```

$G_8$ :

```
7 0 5 10 15 8 13 6 11 4 9 2 7 12 5 10 15 8 13 2
10 3 8 13 6 11 4 9 14 7 0 5 10 15 8 13 2 11 0 5
14 6 11 1 9 14 0 12 2 10 15 8 13 2 11 0 5 14 3 8
1 9 15 4 12 2 7 15 5 13 3 11 0 6 14 3 9 1 6 12
4 13 2 7 0 5 10 3 8 1 6 14 4 9 1 7 12 4 10 15
```

$G_9$ :

```
10 0 8 14 6 11 1 9 15 7 13 5 10 3 8 1 6 15 4 13 2
14 3 11 1 9 15 4 12 2 10 0 8 14 6 11 4 9 2 7 0 5
1 6 15 4 13 2 7 0 5 14 3 12 1 9 15 7 12 5 10 3 8
4 9 2 7 0 5 10 3 8 1 6 15 4 13 2 10 0 8 14 6 12
7 13 5 10 3 8 14 6 11 4 9 2 7 0 5 14 3 11 1 9 15
```

$G_{10}$ :

```
7 0 5 11 3 9 1 7 12 5 10 15 8 13 6 11 4 9 15 7 13 2
11 3 9 14 7 12 5 10 15 8 13 3 11 1 9 15 7 12 2 10 0 5
14 6 12 1 10 15 8 13 2 11 0 6 14 4 12 2 10 0 5 14 3 8
1 10 15 4 13 2 11 0 6 14 4 9 2 7 0 5 13 3 8 1 6 12
4 13 2 8 0 6 14 3 9 1 7 12 5 10 3 8 1 6 11 4 9 15
```

$G_{11}$ :

```
7 0 5 10 15 8 13 3 11 1 6 14 4 9 2 7 12 5 10 15 8 13 2
10 3 8 13 6 11 1 9 14 4 12 2 7 0 5 10 15 8 13 2 11 0 5
14 6 11 1 9 14 4 12 2 7 0 5 10 15 8 13 2 11 0 5 14 3 8
1 9 15 4 12 2 7 0 5 10 15 8 13 3 11 0 6 14 3 9 1 6 12
4 13 2 7 0 5 10 15 8 13 3 11 1 6 14 4 9 1 7 12 4 10 15
```

### 3.2 14- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{5,3k}$ , $T_{5,3k+3}$ , $T_{5,3k+6}$ , and $T_{5,3k+9}$

$\lambda(T_{5,27}) \leq 14$ , the first 12 columns represent a 14- $L(3, 2, 1)$ -labeling of  $T_{5,12}$

```
12 4 14 9 1 11 3 13 8 0 10 2 12 7 14 9 1 11 6 13 8 3 10 5 0 7 2
9 1 11 6 13 8 0 10 5 12 7 14 9 4 11 6 13 8 3 10 5 0 7 2 12 4 14
6 13 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 12 4 14 9 1 11
3 10 5 0 7 2 9 4 14 6 1 8 3 13 5 0 7 2 12 4 14 9 1 11 6 13 8
0 7 2 12 4 14 6 1 11 3 13 5 0 10 2 12 4 14 9 1 11 6 13 8 3 10 5
```

$\lambda(T_{5,33}) \leq 14$ , the first 12 columns represent a 14- $L(3, 2, 1)$ -labeling of  $T_{5,12}$

```
12 4 14 9 1 11 3 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2
9 1 11 6 13 8 0 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14
6 13 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11
3 10 5 0 7 2 9 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8
0 7 2 12 4 14 6 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5
```

$\lambda(T_{5,42}) \leq 14$ , the first 12 columns represent a 14- $L(3, 2, 1)$ -labeling of  $T_{5,12}$

```

12 4 14 9 1 11 3 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2
9 1 11 6 13 8 0 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14
6 13 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11
3 10 5 0 7 2 9 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8
0 7 2 12 4 14 6 1 11 3 13 5 0 7 2 9 4 11 6 13 8 0 10 2 12 4 14 6 1 8 3 10 5 12 7 14 9 1 11 3 13 5

```

### 3.3 14- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{5,15}$ and $T_{5,21}$

$\lambda(T_{5,15}) \leq 14$

```

6 13 8 3 10 5 0 7 2 12 4 14 9 1 11
3 10 5 0 7 2 12 4 14 9 1 11 6 13 8
0 7 2 12 4 14 9 1 11 6 13 8 3 10 5
12 4 14 9 1 11 6 13 8 3 10 5 0 7 2
9 1 11 6 13 8 3 10 5 0 7 2 12 4 14

```

$\lambda(T_{5,21}) \leq 14$

```

9 14 7 12 5 10 3 8 1 6 14 4 12 2 10 0 8 13 6 11 1
12 2 10 0 8 13 6 11 4 9 2 7 0 5 13 3 11 1 9 14 4
0 5 13 3 11 1 9 14 7 12 5 10 3 8 1 6 14 4 12 2 7
3 8 1 6 14 4 12 2 10 0 8 13 6 11 4 9 2 7 0 5 10
6 11 4 9 2 7 0 5 13 3 11 1 9 14 7 12 5 10 3 8 13

```

### 3.4 15- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{5,m}$ for $m = 20, 22, 25, 29$

$\lambda(T_{5,20}) \leq 15$

```

13 3 8 0 6 11 3 9 14 6 12 1 10 15 7 13 2 10 0 5
10 15 5 13 2 8 0 5 11 3 9 14 6 12 4 9 15 7 12 2
7 12 1 10 15 4 13 2 7 0 5 11 3 8 1 6 11 4 9 14
4 9 14 7 12 1 10 15 4 13 2 7 0 5 14 3 8 1 6 11
1 6 11 4 9 14 7 12 1 10 15 4 13 2 11 0 5 14 3 8

```

$\lambda(T_{5,22}) \leq 15$

```

4 9 15 7 13 2 11 0 6 14 4 9 2 7 12 5 10 3 8 1 6 11
1 6 12 4 10 15 8 13 2 11 0 6 14 4 9 2 7 0 5 13 3 8
14 3 8 1 6 12 4 10 15 8 13 3 11 1 6 15 4 12 2 10 0 5
10 0 5 14 3 9 1 7 12 5 10 15 8 13 3 11 1 9 15 7 12 2
7 13 2 11 0 5 14 3 9 1 7 12 5 10 0 8 14 6 11 4 9 15

```

$$\lambda(T_{5,25}) \leq 15$$

```

8 1 6 15 4 9 2 7 0 5 10 3 8 13 6 11 4 9 14 2 12 0 5 15 3
11 4 9 2 7 12 5 10 3 8 13 6 11 0 9 14 7 12 0 10 15 3 13 1 6
2 7 13 5 10 0 8 13 6 11 0 9 14 3 12 5 2 15 8 5 1 11 8 4 14
5 15 0 8 14 3 11 1 9 14 4 12 1 7 15 0 10 6 3 13 9 6 2 12 9
13 10 3 12 1 6 15 4 12 2 7 15 5 10 2 8 13 1 11 7 4 14 10 7 0

```

$$\lambda(T_{5,29}) \leq 15$$

```

10 2 8 0 5 11 3 8 1 6 11 4 9 14 7 12 5 10 15 8 1 6 11 4 9 1 7 15 4
6 15 4 13 2 7 0 5 14 3 8 1 6 11 4 9 2 7 0 5 13 3 8 0 6 14 3 12 1
3 12 1 10 15 4 13 2 11 0 5 14 3 8 1 6 14 4 12 2 10 15 5 13 2 11 0 9 14
0 9 14 7 12 1 10 15 7 13 2 10 0 5 13 3 11 1 9 14 7 12 1 10 15 8 13 6 11
13 5 11 3 9 14 6 12 4 9 15 7 12 2 10 15 8 13 6 11 4 9 14 7 12 5 10 2 8

```

### 3.5 16- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{5,23}$

$$\lambda(T_{5,23}) \leq 16$$

```

14 9 16 11 6 1 8 15 0 3 12 7 14 2 10 6 12 2 14 8 5 12 3
11 4 1 8 3 13 5 2 10 6 1 4 11 8 16 3 0 10 4 16 2 9 6
2 7 13 5 15 10 0 12 4 14 9 16 6 0 13 9 15 7 1 11 14 4 16
5 15 10 0 12 7 3 9 16 11 5 13 3 15 7 1 5 13 9 3 7 1 13
0 12 3 14 9 16 11 6 13 8 15 0 9 12 4 14 8 16 6 0 10 15 8

```

## 4 $\lambda(T_{6,m})$

### 4.1 13- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{6,m}$ for $m \geq 31$

$\lambda(T_{6,22}) \leq 13$ , the first 4 columns represent a 13- $L(3, 2, 1)$ -labeling of  $T_{6,4}$

```

7 12 9 4 1 12 9 4 1 6 9 12 1 6 9 12 1 6 9 12 1 4
0 3 6 11 8 3 6 11 8 3 0 7 4 13 0 7 4 11 2 5 8 11
5 10 13 2 5 10 13 2 5 10 13 2 11 8 5 10 13 0 7 10 13 2
12 1 4 9 12 1 4 9 12 1 4 9 6 1 12 3 6 9 12 1 4 7
3 8 11 6 3 8 11 0 3 8 11 0 13 4 7 0 11 2 5 8 11 0
10 5 2 13 10 5 2 7 10 13 2 5 8 11 2 5 8 13 0 3 6 13

```

$\lambda(T_{6,31}) \leq 13$ , the first 4 columns represent a 13- $L(3, 2, 1)$ -labeling of  $T_{6,4}$

```

8 4 1 11 8 5 1 11 8 5 2 11 0 5 8 3 12 1 10 7 4 1 10 7 4 1 11 7 4 1 11
2 12 9 6 2 12 9 6 3 12 9 6 3 12 1 10 5 8 13 2 11 8 5 2 12 8 5 2 12 9 6
10 0 3 13 10 0 4 13 10 0 4 13 10 7 4 13 0 3 6 9 0 3 13 9 0 3 13 10 0 3 13
4 8 11 1 5 8 11 1 5 8 11 2 5 0 9 2 7 10 1 4 7 10 1 4 7 11 1 4 7 11 1
12 2 6 9 12 2 6 9 12 3 6 9 12 3 6 11 4 13 8 11 2 5 8 12 2 5 8 12 2 5 9
0 10 13 3 0 10 13 4 0 10 13 4 7 10 13 0 9 6 3 0 9 13 3 0 9 13 3 0 10 13 3

```

$\lambda(T_{6,33}) \leq 13$ , the first 4 columns represent a 13- $L(3, 2, 1)$ -labeling of  $T_{6,4}$

```

8 3 6 11 8 2 6 11 8 2 6 11 8 2 5 11 7 2 5 10 7 2 13 10 7 2 5 0 11 8 3 6 11
5 10 13 1 5 10 13 1 5 10 13 1 4 10 13 1 4 9 13 1 4 9 6 1 4 11 8 13 2 5 10 13 2
12 0 4 9 12 0 4 9 12 0 3 9 12 0 3 8 12 0 3 8 12 0 3 8 13 0 3 10 7 12 1 4 9
3 8 11 6 3 8 11 6 2 8 11 5 2 7 11 5 2 7 11 5 2 7 10 5 2 7 12 5 0 3 8 11 6
10 5 1 13 10 5 1 13 10 4 1 13 10 4 1 13 10 4 1 13 9 4 1 12 9 4 1 8 13 10 5 2 13
0 12 9 4 0 12 9 3 0 12 9 3 0 12 9 3 0 12 8 3 0 11 8 3 0 13 10 3 6 1 12 9 4

```

## 4.2 13- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{6,26}$

$\lambda(T_{6,26}) \leq 13$

```

8 3 0 13 10 3 6 13 0 3 8 11 0 3 8 5 0 3 8 11 2 13 8 5 2 11
1 12 9 4 7 12 1 4 9 6 1 4 9 6 1 12 9 6 13 4 7 10 1 12 7 4
10 5 2 11 0 5 8 11 2 13 10 7 2 13 10 7 2 11 0 9 12 3 6 9 0 13
3 8 13 6 3 10 13 0 5 8 3 0 5 8 3 0 13 8 3 6 1 8 13 2 11 6
12 1 4 9 12 7 4 9 12 1 6 9 12 1 6 9 4 1 10 13 4 11 0 7 4 9
5 10 7 2 5 0 11 2 7 10 13 2 7 10 13 2 7 12 5 0 9 6 3 10 13 0

```

## 4.3 14- $L(3, 2, 1)$ -labelings of $T_{6,21}$

$\lambda(T_{6,21}) \leq 14$

```

12 5 0 9 12 5 8 13 10 5 2 14 8 12 4 1 8 12 4 1 9
2 10 13 6 1 10 3 6 1 12 7 10 3 0 9 13 3 0 10 13 6
14 7 3 11 14 7 0 11 8 3 0 5 13 7 2 5 11 14 7 3 11
4 12 9 0 5 12 9 2 5 10 14 8 1 4 12 8 1 4 12 9 1
10 2 6 13 10 1 4 7 12 1 6 3 10 14 0 3 13 10 0 5 13
7 14 11 3 7 14 11 0 3 8 11 0 5 2 7 11 5 2 14 11 3

```