

## Vaje 7: Determinanta

Naloga na vajah:

1. Permutacija  $\pi_n \in S_{2n}$  je določena s predpisom:

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Permutaciji  $\pi_3$  in  $\pi_4$  zapiši kot produkt ločenih ciklov in kot produkt transpozicij.  
(b) S preštetjem inverzij določi parnost permutacije  $\pi_n$ .

2. Permutacija  $\pi \in S_8$  je določena s produktom ciklov

$$\pi = (1235)(6543)(864).$$

Zapiši jo kot produkt ločenih ciklov in kot produkt transpozicij. Določi tudi njeno parnost.

3. Samo z uporabo definicije determinante izračunaj:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

4. S pomočjo razvoja determinante po vrstici oz. stolpcu izračunaj

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -t \end{vmatrix}$$

5. Vemo, da so števila 20604, 53227, 25755, 20927 in 78421 deljiva z 17. Dokaži, da je tudi naslednja determinanta deljiva z 17

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. S pomočjo Gaussove eliminacije izračunaj determinanti

(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

7. S pomočjo rakurzivne formule izračunaj determinanto

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

8. Poišči splošna člena zaporedij, ki sta podani rekurzivno:

(a)  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$  in  $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ ,

(b)  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  in  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ .

9. Dokaži, da za naslednjo determinanto velikosti  $2n \times 2n$  velja:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & \cdots & b & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & a & b & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & b & a & \vdots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & b & \cdots & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n.$$

Samostojno reši: [1, Naloge: 400(d), 401(b), 402(e)], [2, Naloge: 219, 221, 237] in [3, Naloge: 182, 185, 188].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bo  $a$  realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti  $n \times n$  :

$$\begin{vmatrix} -a & 2a & & & & \\ & -a & 2a & & & \\ & & -a & 2a & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a & 2a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Reši enačbo:

$$\begin{vmatrix} -x+2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & x+3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & x+(n-2) & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n-2 & x+(n-1) & 1 \\ 4 & 6 & \cdots & 2(n-2) & 2(n-1) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^n & 2x^2+x \\ x^{n-2} & x \end{vmatrix}.$$

3. Dokaži, da za naslednjo determinanto velikosti  $2n \times 2n$  velja:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{b}{2n} \\ 0 & \frac{a}{4} & \cdots & \cdots & \frac{b}{2(2n-1)} & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & \frac{a}{n^2} & \frac{b}{n(n+1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{b}{n(n+1)} & \frac{a}{(n+1)^2} & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \frac{b}{2(2n-1)} & \cdots & \cdots & \frac{a}{(2n-1)^2} & 0 \\ \frac{b}{2n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a}{4n^2} \end{vmatrix} = \frac{(a^2 - b^2)^n}{(2n!)^2}.$$

## Literatura

- [1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.
- [2] M. Kolar, B. Zgrablič: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.
- [3] B. Zgrablič: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.