

## Vaje 14: Karakteristični in minimalni polinom

Naloge na vajah:

1. Endomorfizmu  $\mathcal{A} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  v standardni bazi prostora  $\mathbb{C}^3$  pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poišči karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne vektorje ter minimalni polinom endomorfizma  $\mathcal{A}$ .  
(b) Zapiši bazo prostora  $\mathbb{C}^3$ , v kateri preslikavi  $\mathcal{A}$  pripada diagonalna matrika.

2. Določi karakteristični in minimalni polinom endomorfizma  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , če je

- (a)  $\mathcal{A}$  zrcaljenje čez premico  $x = y = z$ ;  
(b)  $\mathcal{A}$  projekcija na ravnino  $x + y = 0$  vzdolž premice  $x = y = z$ ;  
(c)  $\mathcal{A}$  vrtenje v pozitivni smeri okoli osi  $z$  za pravi kot.

3. Poišči karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne vektorje ter minimalni polinom matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči tudi tako diagonalno matriko  $D$  in tako obrnljivo matriko  $P$ , da bo  $D = P^{-1}AP$ .

4. Naj bosta  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Dokaži ali ovrzi:

- (a) Če sta  $A$  in  $B$  podobni matriki, potem imata enak minimalni polinom.  
(b) Če imata matriki  $A$  in  $B$  enak minimalni polinom, sta podobni.  
(c) Če imata matriki  $A$  in  $B$  enak karakteristični in minimalni polinom, sta podobni.

Pomoč: oglej si naslednja para matrik:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Naj ima kvadratna matrika  $A$  karakteristični polinom  $p_A(\lambda) = \lambda^7 - 2\lambda^5 + \lambda^3$ . Naj velja tudi  $A^5 - 2A^4 - A^3 + 2A^2 = 0$ . Zapiši minimalni polinom  $m_A(\lambda)$ , če veš, da se matrika  $A$  ne da diagonalizirati.
6. Naj bo  $m_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3$  minimalni polinom realne kvadratne matrike  $A$ .
- (a) Izrazi  $A^{-1}$  kot polinom matrike  $A$ .
- (b) Poišči minimalni polinom matrike  $A^{-1}$ .

Samostojno reši: [1, Naloge: 522, 524, 533], [2, Naloge: 278, 295, 296] in [3, Naloge: 261, 264, 269].

Primeri izpitnih nalog:

1. (a) Zapiši karakteristični polinom in lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 1-a \end{bmatrix}.$$

- (b) Glede na parameter  $a$  poišči lastne vektorje, ki pripadajo lastnim vrednostim matrike  $A$ .
- (c) Za katere  $a$  je matrika  $A$  podobna diagonalni matriki  $D$ ? Določi tudi matriko  $P$ , da bo veljalo  $D = P^{-1}AP$ .

2. Dana je matrika  $A \in M_6(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad b > 0.$$

Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Ali je matrika  $A$  podobna diagonalni matriki? Če je, kateri?

## Literatura

- [1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.
- [2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.
- [3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.