Vaje 20: Bilinearne in kvadratne forme

Naloge na vajah:

1. Preveri, da vsaka matrika $H \in M_n(\mathbb{F})$ s predpisom $h_H(x, y) = x^T H y$ določa bilinearno formo h_H na vektorskem prostoru stolpcev $\mathbb{F}^n$.

2. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ določi matriko H, ki v standardni bazi pripada bilinearni formi

$$h\left(\left(x_1, x_2, x_3\right), \left(y_1, y_2, y_3\right)\right) = x_1 y_2 + 6x_2 y_2 + 3x_3 y_2 + 3x_2 y_3 - 5x_3 y_3 \, .$$

   Kakšna matrika pripada tej formi v bazi $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$?

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ določi matriko H, ki v standardni bazi $\{1, x, x^2\}$ pripada bilinearni formi

$$h(p, q) = \int_{-1}^{1} x p(x) q(x) \, dx \, .$$

4. Dokaži, da je vsaka bilinearna forma na vektorskem prostoru V vsota simetrične ($h_s(x, y) = h_s(y, x)$) in alternirajoče ($h_a(x, y) = -h_a(y, x)$) bilinerne forme.

5. Dana je preslikava $\phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi(x, y) = 2x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_1 y_4 - 2x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 + 3x_3 y_4 + x_4 y_1 - 3x_4 y_3$$

   za vsaka $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Dokaži, da je ϕ alternirajoča bilinearna forma.

   (b) Poišči tako bazo prostora $\mathbb{R}^4$, da bo ϕ v tej bazi pripadala matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

   To matriko imenujemo kanonska matrika alternirajoče bilinearne forme ϕ.

6. Poišči kanonsko obliko realne kvadratne forme

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

   glede na ortogonalne ter glede na obrnljive transformacije. V obeh primerih napiši, kako se nove koordinate izražajo s starimi.

7. Z ortogonalnimi transformacijami prevedi kvadratno formo $Q(x, y, z) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2$ na diagonalno obliko. Kakšno ploskev predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 30$?

8. Čim natančneje opiši geometrijske lastnosti in lego množice točk v $\mathbb{R}^2$, ki ustreza relaciji

   (a) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$,

   (b) $2x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 765, 766, 772], [2, Naloge: 439(b), 446, 452].

Primera izpitnih nalog:

1. Z ortogonalnimi transformacijami prevedi realno kvadratno formo $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x, y, z) = 13x^2 + y^2 + 4z^2 - 12xz$ v obliko s samimi kvadratnimi členi. Kakšno ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 1$. To ploskev tudi natančno skiciraj.

2. Realna kvadratna forma $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 12xy + 8xz + 4yz.$$

   (a) Zapiši simetrično matriko Q, ki pripada formi v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Z ortogonalnimi transformacijami prevedi formo $\mathcal{Q}$ v obliko s samimi kvadratnimi členi.

   (c) Kakšno ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 27$? Zapiši njene glavne osi in ploskev tudi skiciraj!

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.