Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 25. 1. 2005

1. Dani sta ravnini $\pi : 2x + 2y + z = 3$ in $\Sigma : x + 2y + 2z = 6$.

   (a) Izračunaj kot pod katerim se sekata ravnini π in Σ.

   (b) Določi enačbo premice, ki je od ravnin π in Σ enako oddaljena, in sicer 3 enote. Koliko je vseh rešitev?

2. Dana je matrika
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
   Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n, če je $A = 2I + J$.

3. Dokaži, da vse matrike, ki komutirajo z matriko J iz prejšnje naloge, tvorijo vektorski podprostor v $M_3(\mathbb{R})$. Preveri, da je $\{I, J, J^2\}$ baza tega podprostora

4. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ linearna preslikava, ki po vrsti preslika polinome $x - x^2$, $1 + 2x$, $1 + x$ v polinome $2 + 2x + 2x^2$, $3x$, 1.

   (a) Zapiši matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Poiši lastne vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Ali obstaja baza prostora $\mathbb{R}_2[X]$, v kateri preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 7. 2. 2005

1. Dani sta ravnini $\pi : 5x + z = 16$ in $\Sigma : 2x - y = 5$, katerih presek je premica p.
   (a) Zapiši enačbo premice p.
   (b) Katera točka na sferi $\mathcal{S} : x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 + 4 = 0$ je najbližja premici p.
2. V algebri $M_n(\mathbb{R})$ je dana matrična enačba $A(X - I) = I + X$, kjer je A fiksna matrika in I identična matrika.
   (a) Ali je dana enačba rešljiva, če je $\det(A - I) = 2005$? Če je, koliko rešitev ima?
   (b) Reši dano matrično enačbo za primer $n = 3$ in
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$
3. Ali obstaja linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$, za katero velja
   $$\mathcal{A}(0,1,3,0) = 4 + 2x^2,\ \mathcal{A}(2,-1,3,1) = 1 - x,\ \mathcal{A}(1,0,1,0) = 3 + x + 2x^2,$$
   in ki
   (a) je injektivna?
   (b) je surjektivna?
   (c) ima dvorazsežno jedro?

   V primeru pritrdilnega odgovora linearno preslikavo tudi določi!
4. Prepričaj se, da je matrika
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$
   podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 16. 6. 2005

1. Dana je ravnina $\pi : 2x + y - z = 0$ in točki $A(-1, 2, 2)$, $B(3, 0, 0)$. Naj bo M množica točk v ravnini π, ki so enako oddaljene od točk A in B.
   (a) Določi množico M. Zapiši njeno enačbo!
   (b) Poišči vse tiste točke $T \in M$, za katere velja, da je trikotnik ΔATB pravokoten.

2. Poišči vse realne 2×2 matrike A z lastnostjo $A^2 = I$.

3. Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ sta definirani s predpisoma

$$\mathcal{A}(p) = \int_{-2}^{2} p(x)\,dx \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(p) = p'(2)$$

   za vsak $p \in \mathbb{R}_3[X]$. Določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $\ker \mathcal{A}, \ker \mathcal{B}, \ker \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}$ in $\ker \mathcal{A} + \ker \mathcal{B}$.

4. Prepričaj se, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

   podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 30. 6. 2005

1. Premica p naj bo presek ravnin $x+y+z=0$ in $x-y+2=0$. Določi premico q, ki gre skozi točko $T(1,1,1)$ in seka premico p pod pravim kotom.

2. Glede na vrednost realnega parametra a poišči rešitve linearnega sistema enačb:

$$\begin{aligned} (1+a)\,x+y+z+u&=0,\\ x+(1-a)\,y+z+u&=0,\\ x+y+z+au&=0,\\ x+2y+2z+u&=0. \end{aligned}$$

3. Naj bosta $a,b\in\mathbb{R}$ in

$$A_{a,b}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -b\\ -1 & a & -b & 1\\ -1 & b & a & 1\\ b & -1 & -1 & a \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinanto matrike $A_{a,b}$ in določi vse pare $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, pri katerih matrika $A_{a,b}$ ni obrnljiva.

4. Linearna preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}_3[X]\to M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{A}_a : p(x)\longmapsto \begin{bmatrix} p(0)+p(1) & p''(0)-p''(1)\\ p'(0) & p'''(0) \end{bmatrix}.$$

   (a) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih urejenih bazah prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Poišči jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$ ter zapiši njuno razsežnost.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 25. 8. 2005

1. V $\mathbb{R}^3$ sta dani premici

$$p : x - 1 = y - 3 = 2z - 2 \quad \text{in} \quad q : 2x + 4 = 3 - y = z + 2.$$

Določi njuno presečišče T in zapiši parametrično enačbo premice r, ki je pravokotna na premici p in q ter poteka skozi točko T.

2. V odvisnosti od realnih parametrov a in b reši linearni sistem

$$\begin{aligned} 2ax - y + 6z &= 1, \\ ax - y + 3z &= 1, \\ ax + y + 2z &= b. \end{aligned}$$

3. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko $2E_{12} - 3E_{21} \in M_2(\mathbb{R})$.

   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.

   (b) Preveri, da je podprostor V zaprt za matrično množenje in velja $AB = BA$ za vse $A, B \in V$.

   (c) Dokaži, da za vsak neničelni $A \in V$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

4. Endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (-x - 4y + 6z, 2x + 5y - 6z, x + 2y - 2z).$$

   (a) Zapiši matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore endomorfizma $\mathcal{A}$.

   (c) S pomočjo točke (b) opiši geometrijsko delovanje endomorfizma $\mathcal{A}$.

Točke so razporejene po nalogah: $20 + 20 + 30 + 30$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 8. 9. 2005

1. Določi enačbi ravnin, ki sta pravokotni na premico $x = y - 1 = z$ in se dotikata krogle s središčem $S(1, 1, 1)$ in polmerom $r = 2\sqrt{3}$. Nalogo opremi s pregledno skico!

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dokaži, da je $V = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid (A+X)^2 = A^2 + 2AX + X^2\}$ vektorski podprostor v $M_3(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x} + (\vec{a} \cdot \vec{x})\,\vec{b},$$
kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja.
   (a) Zapiši matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v urejeni bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (b) Ugotovi, za katere vektorje $\vec{a}$ in $\vec{b}$ preslikava $\mathcal{A}$ ni obrnljiva, in za ta primer poišči kako bazo podprostorov $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$.

4. Bilinearna preslikava $\langle . | . \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom
$$\langle p|q \rangle = p(-1)\,q(-1) + p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1).$$
   (a) Dokaži, da je $\langle . | . \rangle$ skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči kako ortonormirano bazo podprostora
$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, p(1) = p(-1)\}.$$

Naloge so enakovredne.