Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 15. 11. 2002

1. V trikotniku ΔABC deli točka M stranico AB v razmerju $AM : MB = 1 : 3$, točka N pa stranico BC v razmerju $BN : NC = 1 : 2$. V kakšnem razmerju seka daljica MN težiščnico na stranico AB?

2. Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje presek ravnin $\pi : x - 2y + 2z = -1$ in $\Delta : 3x + y - z = 4$ ter točko $T\,(0, 1, 2)$. Kam se preslika točka $S\,(2, 0, 0)$ pri zrcaljenju čez Σ?

3. Ugotovi, kaj geometrijsko predstavlja množica tistih točk iz $\mathbb{R}^3$, ki so enako oddaljene od točk $A\,(1, 1, 0)$, $B\,(-1, 2, 1)$ in $C\,(0, 0, 2)$ ter zapiši njeno enačbo.

4. Glede na realni števili a in b obravnavaj rešljivost sistema:

$$\begin{aligned} x + (a+1)\,y + 3z + (a+4)\,u &= b\ , \\ 2x + 2y - z + u &= 3\ , \\ x + y + u &= 1\ , \\ ay + 2z + (a+2)\,u &= b\ . \end{aligned}$$

   V primeru, ko je sistem rešljiv, rešitve tudi zapiši!

Opomba. Pri prvih treh nalogah je obvezna skica!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-dvopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 20. 12. 2002

1. Reši matrično enačbo $A^T XB = A + \left(X^T A\right)^T$, kjer je

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Glede na parameter a določi rank X. Kaj lahko poveš o obrnljivosti matrike X?

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokaži, da velja $(1 + x^2) \det A = (1 - x^2) \det B$.

   (b) Izračunaj determinanto matrike C, če je $A^2 C B^{-3} = 2\,(1 - x^2)\, A^{-1}$.

3. V vektorskem prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, JA^T = AJ\right\}$ in $V = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, JA^T = -AJ\right\}$, kjer je $J = E_{13} + E_{22} + E_{31} \in M_3(\mathbb{R})$.

   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj J^n. Kaj lahko poveš o matriki J^{-1}.

   (b) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora prostora $M_3(\mathbb{R})$. Določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostorov U in V. Kaj lahko poveš o podprostorih $U \cap V$ in $U + V$?

4. Naj bosta U in V naslednji podmnožici vektorskega prostora polinomov stopnje največ 3:

$$U = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p(1) = p'(0) = 0\} \quad \text{in} \quad V = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p(0) = p'(1) = 0\}$$

   Poišči primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 24. 1. 2003

1. Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[X]$ je definirana s predpisom:
$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + (c+d)\,x + (a+b-c-d)\,x^2 + (a+b+c+d)\,x^3.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.
   (b) Poišči podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{T}$, zapiši njuno bazo. Koliko je njuna dimenzija?
   (c) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{T}$ v standardnih bazah prostorov $M_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $\{(1,2), (1,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Poišči podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, zapiši njuno bazo.
   (b) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$.

3. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

4. Naj bo $\mathcal{A}$ pravokotna projekcija prostora $\mathbb{R}^3$ na ravnino $x + 2y + z = 0$.
   (a) Poišči lastne vrednosti preslikave $\mathcal{A}$ in določi njihove lastne podprostore.
   (b) Zapiši tako bazo prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika in to diagonalno matriko tudi zapiši.

Naloge so enakovredne.