Vaje 4: Obravnava linearnih sistemov

Naloge na vajah:

1. Reši sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2\,, \\ x+z+2u &= 2\,, \\ x+y-z-u &= -1\,, \\ 3u-y &= 1\,. \end{aligned}$$

2. Dani so vektorji $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{b}=(-1,2,-1)$, $\overrightarrow{c}=(1,-8,-1)$ in $\overrightarrow{d}=(2,1,1)$. S pomočjo sistema linearnih enačb ugotovi ali so vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ oziroma $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d}$ linearno neodvisni?

3. Ali lahko za kakšen $\lambda\in\mathbb{R}$ zapišemo vektor $\overrightarrow{b}=(1,2,\lambda)$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}_1=(2,1,1)$, $\overrightarrow{a}_2=(-1,2,7)$, $\overrightarrow{a}_3=(1,-1,-4)$ in $\overrightarrow{a}_4=(1,4,11)$?

4. Glede na realno število a poišči rešitve sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} x+z+u &= 2\,, \\ x+ay+z+2u &= 3-a\,, \\ -2x-(1+a)\,z-u &= -4+a\,, \\ ay+2u &= 2-a\,. \end{aligned}$$

5. Glede na realno število a obravnavaj sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}\,.$$

   Kaj geometrijsko predstavlja dani sistem in kaj so njegove rešitve?

6. Glede na realni števili a in b obravnavaj sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & a \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\,.$$

Samostojno reši: [1, Naloge: 123, 129, 131], [3, Naloge: 141, 142, 146] in [2, Naloge: 413(c), 414(b), 415].

Primeri izpitnih nalog:

1. Glede na različne vrednosti realnih parametrov a in b poišči rešitve naslednjega sistema enačb:
$$\begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & v & = & b \\ x & + & ay & + & z & + & v & = & 0 \\ x & + & y & + & az & + & v & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & av & = & 0 \end{array} .$$

2. Dan je sistem enačb
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z - w &= 1 \\ x + 5y + z - 2w &= 2 \\ 3x + 5y + 8z + 3w &= -3 \\ 2x + 2y + bz + 5w &= a \end{aligned}$$
Obravnavaj njegovo rešljivost v odvisnosti od parametrov a in b ter poišči rešitev v posebnem primeru, ko je $a = -1$ in $b = 7$.

3. Glede na realni števili a in b obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{aligned} x + (a+1)\,y + 3z + (a+4)\,u &= b\ , \\ 2x + 2y - z + u &= 3\ , \\ x + y + u &= 1\ , \\ ay + 2z + (a+2)\,u &= b\ . \end{aligned}$$
V primeru, ko je sistem rešljiv, rešitve tudi zapiši!

4. Glede na realno število λ obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda^2 \end{array} .$$

Literatura

[1] E. Kramar: Rešene naloge iz Linearne algebre, DMFA, Ljubljana 1994.

[2] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[3] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.