

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 20.06.2007

1. Določi in skiciraj vsa kompleksna števila z , za katera velja:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \cdot (\operatorname{Re}(z^2) + 4) = 3 \operatorname{Im}(z).$$

2. Dokaži ali ovrzi:

- (a) Če je zaporedje (a_n) konvergentno in njegova limita ni enaka 0, potem je zaporedje $((-1)^n a_n)$ divergentno.
(b) Če zaporedje (a_n) konvergira, potem je omejeno in monotono.

3. Na pravokotniku $ABCD$ s stranicama dolžine $|AB| = 5$ cm in $|BC| = 3$ cm na stranici BC izberemo točki E in F tako, da velja $|BE| = |EF| = |FC|$. Za katero točko X na stranici AB velja, da je kot, ki ga oklepata daljici XE in XF , največji?

4. Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} 3^{-n}.$$

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 04.07.2007

1. Z uporabo prvih dveh odvodov nariši graf funkcije

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

2. Naj za funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ obstaja tak $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, da velja

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|,$$

za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je f zvezna funkcija.

3. Dokaži, da za poljubni realni števili a in b , $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$, velja:

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

4. Funkcijo $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{1+x^3}$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke 0

(a) Določi $f^{(2007)}(0)$.

(b) Izračunaj vsoto vrste:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{2^{3(n+1)}(2n)!!}.$$

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 27.08.2007

1. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3.$$

Poišči predpis funkcije $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-krat}}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in domnevo dokaži z matematično indukcijo.

2. Ali vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{3^n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{\frac{1}{n}}}{\operatorname{arctg}(n)}$$

konvergirata? Če katera izmed vrst konvergira, jo izračunaj.

3. Lik, ki ga omejujejo krivulje $y = \sqrt{x}$, $x^2 + y^2 = 2$ ter $y = 0$ zavrtimo za kot 2π okrog premice $x = 0$. Izračunaj volumen danega telesa.

4. Dano je funkcijsko zaporedje $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x + 1}.$$

Dokaži, da zaporedje konvergira po točkah na $[0, \infty)$ in določi limito. Ali je konvergenca enakomerna na $[0, \infty)$? Odgovor utemelji!

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 10.09.2007

1. Zaporedje (a_n) je podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{8a_n - 3}{2a_n + 1}$$

in začetnim členom $a_1 = 1$.

- (a) Pokaži, da velja $1 \leq a_n \leq 3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in da je zaporedje monotono.
(b) Poišči limito zaporedja (a_n) .

2. Dokaži, da funkcija f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \ln(x + 2e) & ; x \leq -e \\ b \cdot \arctan\left(\frac{e}{x}\right) & ; -e < x < 0 \\ (e^{\frac{a}{x}} + 1)^{-1} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

ni zvezna za nobeni realni konstanti a in b .

3. Dve točki pravokotnika sta na krivulji $y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, dve pa na krivulji $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. Pravokotnik naj ima dve nasprotni stranici vzporedni abscisni osi. Določi položaj točk tako, da bo ploščina pravokotnika največja.

4. (a) Poišči funkcijo $F(x)$, ki zadošča pogoju

$$F'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} \quad \text{in} \quad F\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2.$$

- (b) Določi konstanti a in b , da bo za funkcijo

$$f(x) = \int (x^2 + ax + b) \cdot e^{-x} dx$$

veljalo: $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ in $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.