Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 05. 02. 2010

1. Naj bo $n \geq 2$ naravno število in $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ množica vseh kompleksnih števil, ki ležijo na enotski krožnici. Funkcija $\varphi : K \backslash \{1\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom
$$\varphi(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1}\,.$$
   (a) Določi $\varphi^{-1}(\mathbb{R})$.
   (b) Naj bo $n = 5$. Reši enačbo $\varphi(z) = 1$.

2. Poišči naravno definicijsko območje D_f funkcije
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{\ln(2x^2 - x^4)}\,.$$
Določi tudi tista od števil $\sup D_f$, $\inf D_f$, $\max D_f$ in $\min D_f$, ki obstajajo.

3. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
   (a) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno.
   (b) Ugotovi ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira?

4. Določi realni števili a in b, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} \frac{a+\cos(\pi x)}{b\cdot[x]} & ; \quad x < 2 \\ b+1 & ; \quad x = 2 \\ \left(e^{\frac{1}{2-x}} + b\right)^{-1} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$
zvezna v točki $x = 2$.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 18. 02. 2010

1. Dana je množica $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z^2) > 0 \text{ in } |z| \geq \frac{1}{1000} \right\}$

   (a) Skiciraj množico A.

   (b) Za katera naravna števila n je $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^n \in A$?

2. Naj bo podana množica $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid |2|q|-1| < |q+1|\}$ in funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = [x^2]$. Določi infimum, supremum, minimum in maksimum množice $B \cap f^{-1}\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)\right)$, če obstajajo.

3. Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki je podano s splošnim členom

   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

   monotono in divergentno.

4. Naj bo $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija, za katero velja, da za vsako točko (x, y) njenega grafa velja $x^2 + y^2 = 1$. Določi število točk, v katerih f mora biti zvezna. Odgovor utemelji.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 24. 06. 2010

1. Naj bo n poljubno naravno število. Dokaži, da je $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ iracionalno število. **Opomba:** če tega ne znaš dokazati za poljubno naravno število n, dokaži le za primer, ko je n poljubno praštevilo (15 točk).

2. Skiciraj množico kompleksnih števil z, ki zadoščajo neenačbi:
$$\sqrt{|z|^2-2}+\mathrm{Im}(z)>\mathrm{Re}(z)\,.$$

3. Izračunaj limiti:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+4x}-1} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}\,.$$

4. Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija in $[a,b]\subseteq f([a,b])$. Dokaži, da obstaja tak $c\in[a,b]$, da velja $f(c)=c$.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 08. 07. 2010

1. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja:

$$\left(z^2-1\right)^4+1=(z+1)^4+(z-1)^4\,.$$

   Rešitve prikaži tudi v kompleksni ravnini.

2. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno:

$$a_1=3 \quad \text{in} \quad a_{n+1}=\sqrt[4]{15a_n-14}\,.$$

   Dokaži, da je zaporedje monotono in omejeno ter izračunaj njegovo limito.

3. Podano naj bo tako zaporedje (a_n), da je $a_n \geq 0$ za vsako naravno število n. Dokaži ali ovrzi:

   (a) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ konvergentna.

   (b) Če je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ za vsako naravno število n, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

4. Dana naj bo zvezna funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}^+$ in realna števila $c_1, c_2, \ldots, c_n \in (a,b)$. Dokaži, da obstaja tako realno število $d\in(a,b)$, da velja:

$$f(d)=\sqrt{\frac{f(c_1)^2+f(c_2)^2+\ldots+f(c_n)^2}{n}}\,.$$

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 19. 08. 2010

1. Naj bo A neprazna navzgor omejena podmnožica $\mathbb{R}$ in

   $$B = \{-a \mid a \in A\}.$$

   Dokaži, da je množica B navzdol omejena in da velja

   $$\inf B = -\sup A.$$

   Opomba: vsak korak dokaza ustrezno utemelji.

2. Naj bo $a_n = \sin n$, $n \geq 1$. Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentno. **Pomoč:** zaporedje (a_n) izrazi rekurzivno.

3. Ali vrsti

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4n}{2+4+\ldots+2n}$$

   konvergirata? Odgovor utemelji.

4. Ali obstajata zvezna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ in Cauchyjevo zaporedje (x_n), tako da zaporedje $(f(x_n))$ ne bo Cauchyjevo? Odgovor utemelji.

5. Za katere vrednosti parametra $a, b \in \mathbb{R}$ je funkcija

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(a - e^{\frac{1}{2x}}\right) & ; \quad x < 0 \\ a + b & ; \quad x = 0 \\ \frac{bx+\sin(2x)}{ax+\sin(3x)} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

   zvezna?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 02. 09. 2010

1. Preslikava $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom $f(z) = z^{[|z|]}$. Naj bo $K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Izračunaj $f(5-5i)$ in določi $f^{-1}(K)$ ter $f^{-1}(\{1\})$. **Pomoč:** sliko preslikave f izrazi s polarnimi koordinatami.

2. Podana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\sin(ax)}{\sin(2x)} & ; \quad x < 0 \\ b & ; \quad x = 0 \\ \frac{x}{1-\sqrt{1+x}} + a & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

   (a) Določi a in b tako, da bo funkcija f zvezna v točki 0.

   (b) Naj bo

$$a_n = f\left(-\frac{\pi \cdot n^{(-1)^n}}{4n+4}\right)$$

   za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pokaži, da je vsak člen zaporedja (a_n) definiran in razišči konvergenco.

3. Ali vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(3n+1)} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n}{n(n+1)}$$

   konvergirata? Odgovor utemelji.

4. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka neničelna funkcija, da velja

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

   za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži:

   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $f(x^n) = (f(x))^n$.

   (b) Če je funkcija f zvezna v 1, potem je zvezna na množici $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.