

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Enopredmetna matematika

### 3. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 13.04.2007

1. Z uporabo prvih dveh odvodov nariši graf funkcije

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

2. Naj bo  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  taka odvedljiva funkcija, da za vsak  $x \in (0, \infty)$  velja  $0 \leq f'(x) \leq x$ . Vpeljimo naslednje zaporedje funkcij:

$$f_0 = id, f_1 = f, f_2 = f \circ f, f_3 = f \circ f \circ f, \dots$$

Dokaži, da za vsako naravno število  $n$  in vsak  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$f_n(x+1) - f_n(x) < \prod_{i=0}^{n-1} f_i(x+1).$$

3. Integriraj

$$\int \ln \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right) dx \quad \text{in} \quad \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

4. Na Fakulteti za naravoslovje in matematiko se nahaja termometer, ki meri temperaturo prostora. Denimo, da je bila temperatura na začetku dneva enaka temperaturi na koncu dneva. Dokaži, da je na ta dan v nekem trenutku temperatura enaka kot temperatura pred natanko uro. **Namig:** na funkcijo temperature lahko gledamo kot na zvezno funkcijo  $f : [0, 24] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Enopredmetna matematika

## 4. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 08.06.2007

1. Če projeciramo telo  $T$  na ravnino  $z = 0$  dobimo lik, ki ga omejujejo krivulje  $\sqrt{x}$ ,  $x^2 + y^2 = 2$  in  $y = 0$ . Presek tega telesa s poljubno ravnino  $x = \text{konst.}$  je enakostraničen trikotnik. Izračunaj volumen danega telesa.

2. Pokaži, da integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-1}}$$

konvergira in ga izračunaj.

3. Naj bo

$$f_n(x) = \frac{n + \sin x}{3n + \cos x}.$$

Pokaži, da za vsak  $x \in \mathbb{R}$  zaporedje  $f_n(x)$  konvergira in določi limitno funkcijo  $f$ . Ali zaporedje  $f_n$  konvergira proti  $f$  enakomerno na  $\mathbb{R}$ ? Odgovor utemelji!

4. Funkcijo  $f(x) = (1 + x^3)e^x$  razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke  $a = 0$  in izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 - 3k^2 + 2k + 1}{2^{k-3} \cdot 3^2 \cdot k!}.$$