

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 07.12.2007

1. Naj bo $n \geq 2$. Dokaži, da je

$$\sqrt{n^2 + \sqrt{(n-1)^2 + \sqrt{(n-2)^2 + \dots + \sqrt{2^2 + \sqrt{1^2}}}}}$$

iracionalno število.

2. (a) Naj bo funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ podana s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & ; \quad n = d^2, \text{ za nek } d \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n+2} & ; \quad n \neq d^2, \text{ za vsak } d \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Ali je funkcija f injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.

- (b) Naj ima funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lastnost

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

za poljubna elementa $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je funkcija f injektivna natanko tedaj, ko je $\{x \mid f(x) = 0\} = \{0\}$.

3. Naj bosta funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & ; \quad 1 < x \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x \end{cases} .$$

Določi predpis za funkciji $f \circ g$ in $g \circ f$.

4. (a) V množici kompleksnih števil reši enačbo

$$z^2(z^2 - 6) + i(4z^3 - 4z - \sqrt{3}) = 0.$$

- (b) Pokaži, da je množica

$$\left\{ \left| \frac{|z| - \bar{z}}{\bar{z}} \right| \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

omejena ter določi njen infimum in supremum. Ali obstajata tudi minimum in maksimum?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 21.02.2008

1. Naj bo zaporedje $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ podano z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}$$

in prvi členom $a_1 = 1$.

- (a) Pokaži, da je zaporedje omejeno.
(b) Dokaži, da je zaporedje Cauchyjevo in izračunaj njegovo limito.

2. Ali vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n2^{4n}} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$$

konvergirata? Odgovor utemelji.

3. Izračunaj limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^3}.$$

4. (a) Naj bo $a > 0$ in $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A < \infty.$$

Dokaži, da je f omejena na intervalu $[a, \infty)$.

- (b) Naj bosta $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zvezni, surjektivni funkciji. Dokaži, da obstaja tak $c \in \mathbb{R}$, da velja $f(c) = g(c)$.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

3. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 16.04.2008

1. Z uporabo prvih dveh odvodov nariši graf funkcije

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

2. Dokaži, da za poljuben $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ velja

$$x \cos x \leq \sin x \leq x.$$

S pomočjo dobljene neenakosti izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

3. V koordinatnem sistemu sta podani točki $A(-1, 0)$ in $B(0, -1)$. Točki se pričneta istočasno in enakomerno gibati po svojih koordinatnih oseh v smeri proti koordinatnemu izhodišču. Pri tem se točka A giblje z dvakratno hitrostjo točke B . V katerem trenutku bo razdalja med točkama najmanjša? **Pomoč:** pot, ki jo pri enakomernem gibanju opravimo s hitrostjo v v času t je $v \cdot t$.

4. Integriraj

$$\int \frac{\ln(2x^2 + 5)}{4x^2} dx \quad \text{in} \quad \int \sin(\ln x) dx.$$

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

4. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 09.06.2008

1. Funkcijo $f : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ podano s predpisom $f(x) = \operatorname{tg} x$ prezrcalimo čez premico $x = \frac{\pi}{4}$ in jo skupaj z njeno zrcalno sliko zavrtimo okrog premice $x = \frac{\pi}{2}$. Izračunaj volumen nastale vrtenine.

2. Ali posplošena integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x} \quad \text{in} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x(x^2 - 3)\sqrt{1 + x^2}}$$

konvergirata? Odgovor utemelji.

3. Naj bo

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}.$$

Pokaži, da za vsak $x \in (0, \infty)$ zaporedje $f_n(x)$ konvergira in določi limitno funkcijo f . Ali zaporedje (f_n) enakomerno konvergira proti f na intervalu $(0, \infty)$? Odgovor utemelji.

4. S pomočjo potenčnih vrst izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - n - 2}{(n+2)2^{n+2}}.$$