

KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 03. 03. 2011

1. V prvi posodi imamo 2 beli in 3 črne kroglice, v drugi posodi 1 belo in 2 črni kroglici in v tretji posodi 4 bele in 2 črni kroglici. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo posodo, nato pa kroglico iz druge v tretjo posodo. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje posode.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je na koncu izbrana kroglica črna? (15)

(b) Če vemo, da je na koncu bila izbrana črna kroglica, kolikšna je tedaj verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico? (5)

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo števili a in b . Kolikšna je verjetnost, da kvadratna enačba $x^2 + 2ax + b = 0$ nima realnih rešitev? Kolikšna je ta verjetnost, če je $a > b$? (20)

3. Kovanec mečemo tako dolgo, da prvič pade grb (verjetnost, da pade grb je $p \in (0, 1)$), vendar ne več kot n -krat, $n \geq 2$. Število metov naj bo vrednost naključne spremenljivke X_n .

(a) Zapiši verjetnostno funkcijo naključne spremenljivke X_n . (5)

(b) Dokaži, da je $E(X_n) = \frac{1-q^n}{p}$. (10)

(c) Kaj predstavlja $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$? Odgovor utemelji. (5)

4. Naključni vektor (X, Y) je mešanega tipa. Pri tem je Y diskretna naključna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $P[Y = k] = \frac{2}{3^k}$, $k \in \mathbb{N}$, in X zvezna naključna spremenljivka, pri čemer je naključna spremenljivka $X|Y$ porazdeljena z gostoto

$$p_{X|Y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}y \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{y-1} & ; x \in [0, 2] \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Zapiši gostoto naključnega vektorja (X, Y) in skiciraj njeno definicijsko območje. Izračunaj tudi gostoto naključne spremenljivke X . (20)

5. Zvezna naključna spremenljivka X naj bo enakomerno porazdeljena na intervalu $[-a, a]$, $a > 0$. Izračunaj karakteristično funkcijo naključne spremenljivke $Y = \ln |X|$. (20)