

1. delni izpit iz ELEMENTARNIH FUNKCIJ
9. 11. 2015

Navodila:

- Čas reševanja je **120 minut**.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon.
- Uporaba knjig in zapiskov iz predavanj ter vaj **ni dovoljena**.
- Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor **skrbno utemelji**.
Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.
- Piši čitljivo; neberljivi odgovori ne bodo točkovani.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, A4 list s formulami.

.....
1. **[25]** Podana je preslikava

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) \\ F : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

- Ugotovi, ali je F injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.
- Zapiši in skiciraj množici $F^{-1}(\{4\})$ ter $F^{-1}([1, 9])$.
- Ali je funkcija F , zožena na množico $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \wedge y \geq 0\}$ injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.

2. **[15]** Podani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < -2 \\ -x^2 + 5, & -2 \leq x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}.$$

Zapiši predpis funkcije $f \circ g$, nariši njen graf in določi zalogo vrednosti te funkcije.

3. **[25]** Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dane so množice $A = f([3, \infty))$, $B = f^{-1}([-2, 4])$ in $C = f\left(\left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

- Zapiši in skiciraj množici A in B v \mathbb{R} .
- Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic A , B in C .
Odgovor za infimum množice C tudi dokaži.

4. **[15]** Naj bosta $f : B \rightarrow C$ in $g : A \rightarrow B$ funkciji ter naj bo $f \circ g : A \rightarrow C$ njun kompozitum.

- Dokaži: če je funkcija $f \circ g$ surjektivna, potem je f surjektivna.
- Naj velja $A = B = C = \mathbb{R}$. Poišči taki funkciji f in g , da bo f surjektivna, $f \circ g$ pa ne.

5. **[20]** Dani sta množici v \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = -\frac{x^2}{4} + x\} \text{ in } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x - 4y^2 = 0 \wedge y \geq 0\}.$$

- Skiciraj množici v ravnini in zapiši množico $A \cap B$, tako da našteješ vse njene elemente.
- Utemelji, ali katera izmed množic A oz. B predstavlja graf kake realne funkcije realne spremenljivke? Če je odgovor da, zapiši domeno in funkcijski predpis te funkcije.