Seminarska pri predmetu Kombinatorika

Natalija Krofl

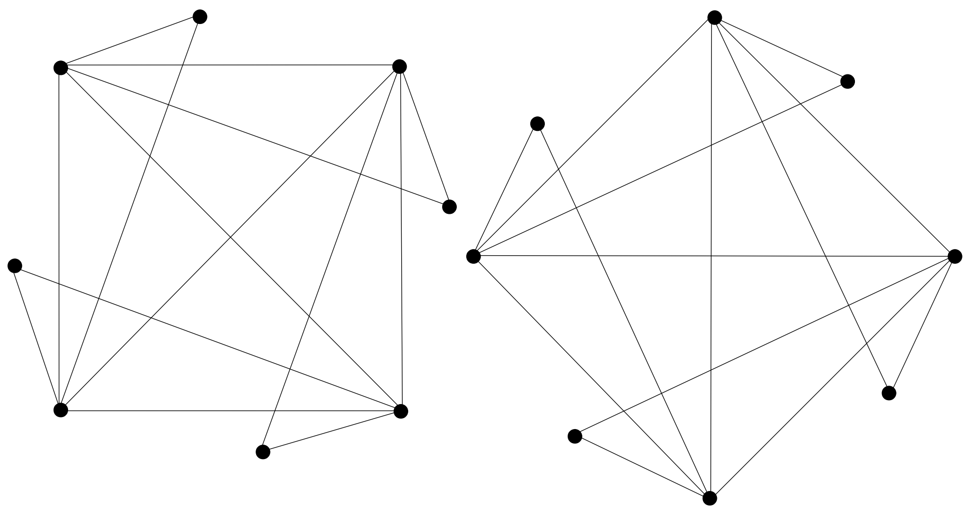
Maj 2004

9.2. Gostota in razcepno število

Definicija 1 **Gostota** grafa G, označena s $\Theta(G)$, je najmanjše število ravninskih podgrafov v razcepu grafa G. $\Theta(G) = t$ pomeni, da

$$G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_t$$

kjer je H_i ravninski graf za vsak i in ne obstaja dekompozicija grafa G v $t-1$ ravninskih podgrafov.



Slika 1:

Izrek 1 *Če je G graf s p točkami in q povezavami, potem*

$$\Theta(G) \geq \frac{q}{3p-6}$$

Dokaz. Predpostavimo, da velja $\Theta(G) = t$. Potem obstaja razcep grafa G v t podgrafov H_i in vsak od njih ima q_i povezav, za katere po izreku 8.1.3. velja:

$$q_i = 3p - 6.$$

Ker $q_1 + q_2 + ... + q_t = q$, velja:

$$q \leq t(3p - 6)$$

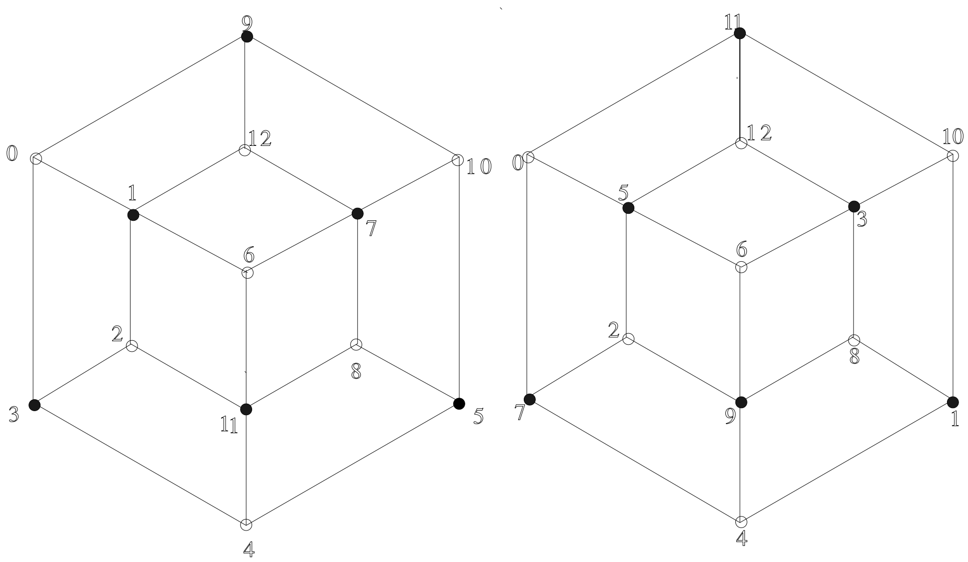
Izrek 2 *Če je G dvodelni graf s p točkami in q povezavami, potem:*

$$\Theta(G) \geq \frac{q}{2p-4}.$$

Dokaz. Za domačo nalogo.

Izrek 3 *Gostota celega grafa je:*

$$\Theta(K_n) = \begin{cases} \frac{n+7}{6} & ; n \neq 9, 10, \\ 3 & ; n = 9, 10. \end{cases}$$



Slika 2: *prikazuje razcep grafa $K_{6,7}$ v dva izomorfna ravninska podgrafa. Pri tem je vsaka liha točka sosedna z vsemi sodimi točkami.*

Ker mora biti gostota $K_{6,7}$ enaka dva, $K_{6,7}$ ni ravninski. Iz tega lahko izpeljemo nižjo mejo s pomočjo izreka 2 :

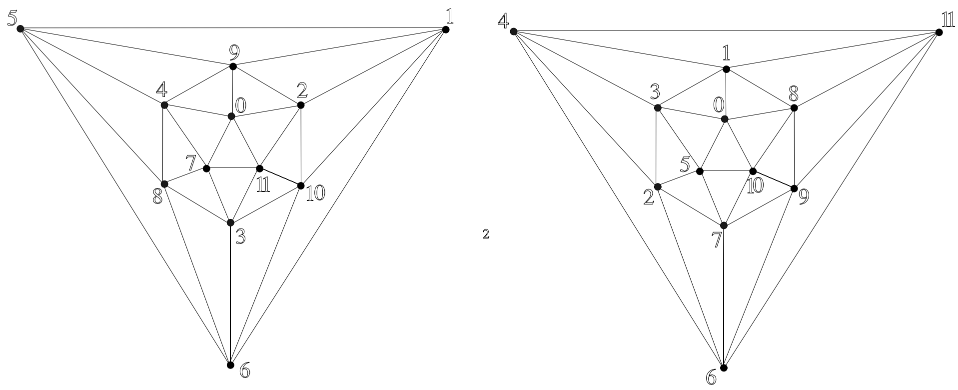
$$\Theta\left(K_{m,n}\right) \geq \frac{mn}{2\left(m+n-2\right)}$$

.

Beinke, Harary in Moon so pokazali, da velja tudi :

$$\Theta\left(K_{m,n}\right) = \frac{mn}{2\left(m+n-2\right)}$$

.

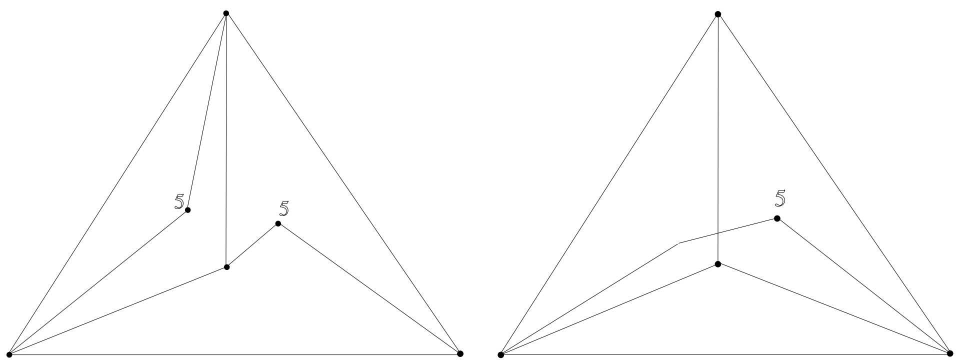


Slika 3: *prikazuje razcep* $K_{2,2,2,2,2,2}$ *v dva izomorfna grafa, ki sta vsak zase ikozaedra. Vidimo, da je vsak par razen* $(0,6)$, $(1,7)$, $(2,8)$, $(3,9)$, $(4,10)$ *in* $(5,11)$, *soseden.*

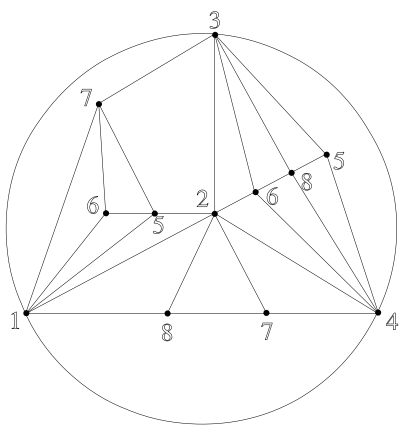
Število križanj in gostota sta primera merjenja kako blizu je graf G ravninskemu grafu.

Definicija 2 Naj bo G graf in u, v točki na njem. Nov graf G' skonstruiramo tako, da točki u in v nadomestimo z eno samo točko w, ki je sosedna z vsemi točkami v G' , katere so bile sosedne bodisi z u, bodisi z v v G. Ta postopek imenujemo **IDENTIFIKACIJA DVEH TOČK**. Če hočemo identificirati dve točki ju ponavadi označimo z istim simbolom.

Definicija 3 Naj bo G graf in w točka na njem. Nov graf G' skonstruiramo tako, da točko w nadomestimo s točkama u in v, tako, da je u sosedna z nekaj točkami, ki so bile prej sosedne z w, v pa z ostalimi, ki so prav tako bile sosedne z w. Ta postopek imenujemo **RAZDELITEV TOČKE** w, najmanjše število razdelitev, potrebnih za transformacijo grafa G v ravninski graf pa označimo z $\sigma(G)$.

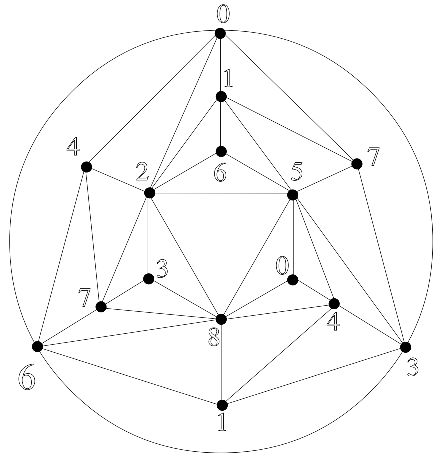


Slika 4: *Levi graf na sliki prikazuje ravninski graf v katerem sta dve različni točki označeni s 5. Če ti dve točki zlepimo, dobimo desni graf na sliki.*



Slika 5: *prikazuje ravninski graf H z dvanajstimi točkami. Če identificiramo enako označene točke, dobimo K_8, zato pravimo, da je H ravninska razdelitev K_8.*

Iz tega sledi, da mora biti $\sigma(K_8) \leq 4$, po drugi strani pa velja, da mora biti $\sigma(K_n) \geq n-4$, če hočemo K_n transformirati v planaren graf s samo $n-5$ razdelitvami. Iz vsega skupaj sledi, da $\sigma(K_8) = 4$.



Slika 6: *prikazuje razdelitev K_9 v ravninski graf.* $\sigma(K_9) = 6$

Izrek 4 *Če $n \geq 10$, potem velja:*

$$\sigma(K_n) = \left[\frac{(n-3)(n-4)}{6}\right]$$

Dokaz. Dokažimo samo lažji del, to je da velja:

$$\sigma(K_n) \geq \left[\frac{(n-3)(n-4)}{6}\right]$$

Imejmo razdelitev H grafa G z $\sigma(G)$. Potem, če ima G p točk in q povezav, ima H $p+s$ točk in q povezav. Ker je H po enem prejšnjih izrekov ravninski, velja:

$$q \leq 3(p+s) - 6$$

.

Zato:

$$\frac{q-3p+6}{3} \leq s = \sigma(G)$$

Če $G = K_n$, potem $p = n$ in $q = \binom{n}{2}$, torej

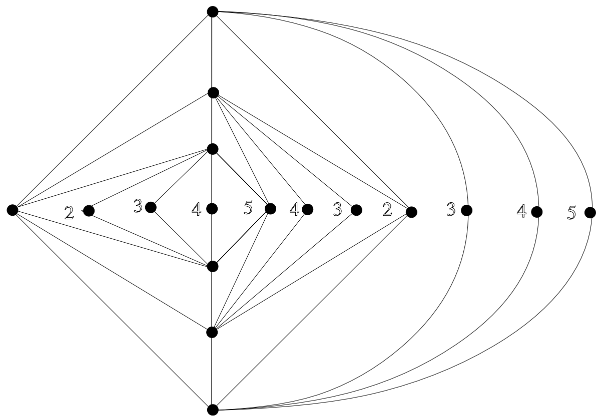
$$\sigma(K_n) \geq \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6}{3} = \frac{(n-3)(n-4)}{6}$$

Izrek 5 *Najmanjše število razdelitev za $K_{m,n}$ je:*

$$\sigma\left(K_{m,n}\right)=\left[\frac{(m-2)\,(n-2)}{2}\right] zam, n\leq 2$$

.

Dokaz. Za vajo



Slika 7: *prikazuje razdelitev $k_{5,6}$. Število razdelitev za vsako točko je enako številu kolikokrat se točka pojavi na sliki minus ena*