KOMBINATORIKA

Teorija grafov

GRAFOVSKA ZAPOREDJA

Seminarska naloga

Simona Simonič

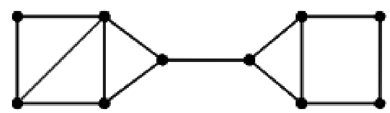
Maribor, 19.4.2005

DEFINICIJA 1. *Zaporedje stopenj grafa je zaporedje točk, ki ga ponavadi zapišemo kot nepadajoče zaporedje*

$$d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$$

$d_i =$ *stopnja točke* i.

Na sliki spodaj imamo primer grafa G. Zaporedje stopenj točk grafa G, bi bilo naslednje: $2 \leq 2 \leq 2 \leq 3 \leq 3 \leq 3 \leq 3 \leq 3 \leq 3 \leq 3 \leq 4$.



TRDITEV 2. *Nenegativna števila* $d_1, \ldots d_n$ *so stopnje točk nekega grafa natanko takrat, ko je*

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i)$$

sodo število.

DOKAZ. $\Rightarrow$ Če so $d_i, \ldots d_n$ stopnje točk grafa, potem po lemi sledi,

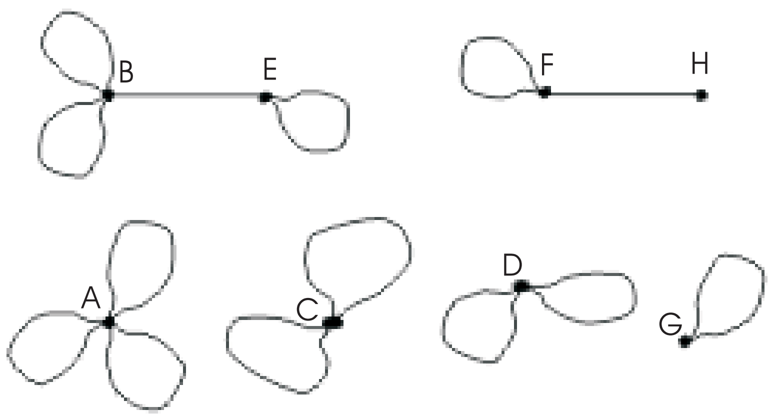
$$\sum_{i=1}^{n} (d_i) = 2 * E(G),$$

kar je sodo število.

$\Leftarrow$ Sedaj moramo pri predpostavki, da je vsota stopenj točk nekega grafa sodo število pokazati, da so $d_1, \ldots, d_n$ stopnje točk nekega grafa. Torej $\sum (d_1, \ldots, d_n)$ je sodo število, kar pomeni, da je število točk z lihimi stopnjami sodo. Take točke povežemo in jim dodajamo zanke. Dodamo jim toliko zank, da dobimo željeno oz. sodo stopnjo posamezne točke. $\square$

PRIMER 1:
Poglejmo si veljavo trditve, če so dane naslednje stopnje točk nekega grafa. Stopnje točk 6 5 4 4 3 3 2 1 označimo z črkami od A do H (brez šumnikov). Pomagamo si s spodnjo sliko. V prvo vrsto smo najprej narisali točke z lihimi stopnjami, v drugo vrsto pa točke s sodimi stopnjami. V prvi vrsti povežemo po dve in dve točki. Torej so te štiri točke že stopnje ena. Da

dobimo željeno stopnjo, pa jim dodamo še zadostno število zank. Točki B dodamo dve zanki, točki E in F eno zanko, točki H pa ne dodamo nobene zanke, saj je že ustrezne stopnje. V drugi vrstici pa imamo točke, ki morajo biti sode stopnje, zato jim dodamo samo ustrezno število zank. Točki A tri zanke, točkama C in D po dve zanki in točki G eno zanko.



DEFINICIJA 3. *Grafovsko zaporedje je seznam nenegativnih števil, katera podajajo zaporedje stopenj točk enostavnega grafa.*

Opomba:

Enostaven graf je graf v katerem ni zank in večkratnih povezav.

PRIMER 2:

Dano je grafovsko zaporedje 3 3 3 3 3 2 2 1. Zanima nas, ali nam to zaporedje predstavlja graf? Kako to preverimo?

1.Zaporedje si uredimo po velikosti

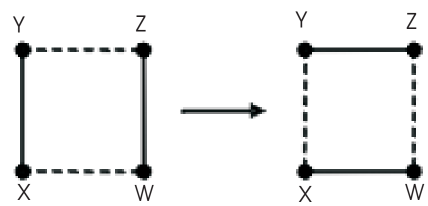
2.Točko z največjo stopnjo izbrišemo in nato od toliko naslednjih točk, kot je bila stopnja izbrisane odštejemo ena

Zaporedje si poenostavimo do koder gre.

V našem primeru dobimo: 2 2 2 3 2 2 1→ 3 2 2 2 2 2 1→1 1 1 2 2 1→2 2 1 1 1 1→ 1 0 1 1 1. Lahko naredimo še en korak ni pa nujno. Vidimo, da nam je začetno zaporedje res predstavljalo graf, ki je sestavljen iz dveh komponent, vsaka komponenta ima dve točki in povezavo med njima. To sploh ni presenetljivo, saj smo to brez težav ugotovili tudi s pomočjo posledice.

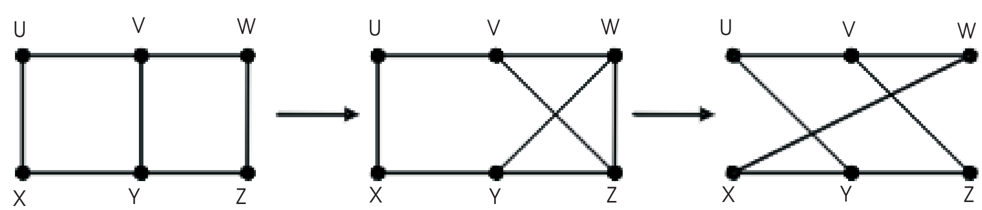
IZREK 4. *Za $n > 1$ je zaporedje števil $d_1, \ldots, d_n$ grafovsko zaporedje natanko tedaj, ko je d' grafovsko, pri čemer pa d' dobimo iz d tako, da brišemo element največje stopnje, stopnje δ, in od δ naslednjih točk odštejemo 1. Zaporedje z enim samim elementom je stopnje 0.*

DEFINICIJA 5. *Dva preklop je nadomestitev para povezav XY in ZW v grafu s povezavama YZ in WX, pri čemer pa se slednji ne pojavita v originalnem grafu.*



Na gornji sliki vidimo en možen dva preklop. Drug možen dva preklop bi bil tudi ta, da bi povezali točki YW in ZX.
Dva preklope delamo s takimi povezavami, katerih ni v originalnem grafu.Dva preklop nam tudi ohranja stopnje točk.
Če nam nek dva preklop spremeni graf H v H^*, potem obstaja dva preklop, ki nam graf H^* spet spremeni v H.

Na spodnji sliki vidimo primer dveh zaporednih dva preklopov.



IZREK 6. *Če sta G in H enostavna grafa z množico točk V, potem je $d_G(v) = d_h(v)$ za vsak $v \in V$ natanko tedaj,če obstaja zaporedje dva preklopov, ki transformirajo graf G v H.*