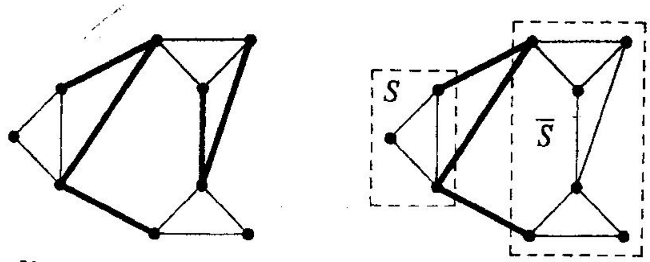
Seminarska naloga iz Kombinatorike

Tina Simonič

Maribor, 17.05.2005

DEFINICIJA 1. *Presečna množica povezav povezanega grafa je takšna množica $F \subseteq E(G)$, tako da ima G-F več kot eno komponento. Graf je k-povezan po povezavah, če ima vsaka presečna množica najmanj k povezav. Povezanost po povezavah grafa G zapišemo $\kappa'(G)$ in je moč minimalnega povezavnega prereza.*
Dana sta $S, T \subseteq V(G)$. Z $[S, T]$ označimo množico povezav, ki imajo eno končno točko v S in drugo v T. Povezavni prerez je množica povezav $[S, \bar{S}]$, kjer je S neprazna prava podmnožica V(G) in $\bar{S}$ označuje $V(G) - S$.



OPOMBA: Vsak povezavni prerez je nepovezana množica, kadar $G - [S, \bar{S}]$ nima poti iz S v $\bar{S}$. Obratno ne velja, ker presečna množica ima lahko dodatne povezave.

Vsaka minimalna presečna množica povezav je povezavni prerez (če $n(G) > 1$). Če ima $G - F$ več kot eno komponento za kakšen $F \subseteq E(G)$, potem za kakšno točko H iz $G - F$ izbrišemo vse povezave z natanko eno končno točko v H. Zato F vsebuje povezavni prerez $[V(H), \bar{V}(H)]$ in F ni minimalna presečna množica razen, če je $F = [V(H), \bar{V}(H)]$.

Z brisanjem ene končne točke v povezavnem prerezu F zbrišemo vse povezave v F. Iz tega sledi $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

IZREK 2. *Če je G enostaven graf, potem velja:*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

DOKAZ. Neenakost $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ je očitna, pokazati še moramo:

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G).$$

Opazili smo, da $\kappa(G) \leq n(G) - 1$. Gledamo na najmanjšem povezavnem prerezu $[S, \bar{S}]$.
Če je vsaka točka iz S sosedna z vsako točko v $\bar{S}$ potem

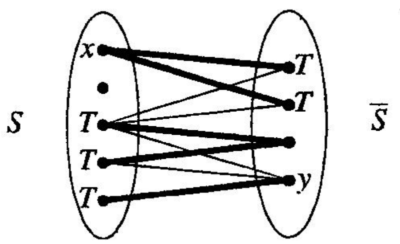
$$\left|[S, \bar{S}]\right| = |S| \left|\bar{S}\right| \geq n(G) - 1 \geq \kappa(G).$$

Drugače izberemo $x \in S$ in $y \in \bar{S}$ tako da nista sosedna. T naj bodo sosedne točke x v $\bar{S}$ in vse točke iz S-$\{x\}$ z sosednimi v $\bar{S}$. Vsaka x,y-pot gre skozi T, torej T je ločljiva množica.

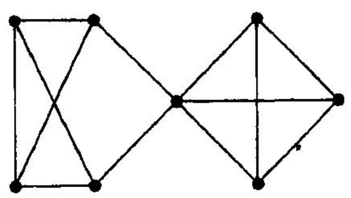
Z izbiro povezav iz x v $T \cap \bar{S}$ in vsako povezavo iz vsake točke iz $T \cap S$ v $\bar{S}$ prinese $|T|$ izrazita povezava $[S, \bar{S}]$.Torej:

$$\kappa'(G) = \left|[S, \bar{S}]\right| \geq |T| \geq \kappa(G).$$

$\square$



PRIMERI: 1.Za graf G, $\kappa(G) = 1, \kappa'(G) = 2$ in $\delta(G) = 3$.



2.Če G=$K_m + K_m$ imamo $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$ in δ=m-1.

3. Imamo m-klik.

Kadar sta dve povezavi povezani z eno točko imamo $\kappa'(G) = \delta$(G)=m-1, ampak $\kappa(G) = 1$.

IZREK 3. *Če je G 3-regularen graf, potem:*

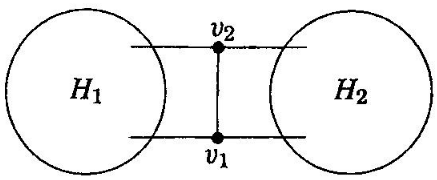
$$\kappa(G) = \kappa'(G).$$

DOKAZ. Naj bo S minimalni prerez točke ($|S| = \kappa(G)$)
Če je $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, potem je povezavni prerez velikosti $|S|$.
Naj bost H_1, H_2 dve komponenti $G - S$.

Kadar je S minimalni prerez točke,ima vsak $v \in S$ soseda v H_1 in v H_2. Kadar je G 3-regularen graf, v ne more imeti dveh sosedov v H_1 in v H_2. Za vsak $v \in S$, zbrišemo povezavo iz v do $\{H_1, H_2\}$, kjer ima v samo enega soseda.

$\kappa(G)$ povezave razbijejo vse poti iz H_1 v H_2, razen kjer pot poteka od v_1 do v_2. V tem primeru izbrišemo povezave v H_1 za v_1 in v_2 da prekinemo poti iz H_1 v H_2 skozi $\{v_1, v_2\}$.

□



TRDITEV 4. *Če je S množica točk v grafu G potem:*

$$\left|[S, \bar{S}]\right| = [\sum_{v \in S} d(v)] - 2e(G[S]).$$

DOKAZ. Povezava v G[S] prispeva dvakrat k $\sum_{v \in S}$d(v), ko je povezava v [S,$\bar{S}$] vsoti prispeva samo enkrat.
Iz tega sledi $\sum_{v \in S} d(v) = \left|[S, \bar{S}]\right| + 2e(G[S])$. □