

Univerza v Mariboru
Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko

Petra Žigert

Zbirka pisnih delov izpitov in kolokvijev iz

KOMBINATORIKE

Študijsko gradivo za študente 4. letnika smeri Matematika

Maribor, 2002

Pisni deli izpitov

24.1.2001

1. V ravnini je n točk, med katerimi jih je k kolinearnih, $n > k$, razen teh pa nobena druga trojica ne določa premice.
 - a) Koliko različnih premic določajo?
 - b) Koliko različnih trikotnikov določajo?
2. Na vrh Triglava se v vrsti vzpne n planincev. Na koliko načinov se lahko spustijo v dolino, če nihče ne sme hoditi za tistim, za katerim se je vzpenjal?
3. Petim vevericam želimo razdeliti 20 orehov. Na koliko načinov lahko to naredimo,
 - a) če naj ima vsaka 2 ali 4 ali 6 orehov,
 - b) če naj nobena ne dobi več kot 5 in manj kot 3 orehe?
4. Izračunaj trdnjavski polinom deske D (prepovedana polja so prekržana) in izračunaj število načinov postavitve 6 nenapadajočih se trdnjav na komplement deske D .

X			X	X	X
	X	X		X	X
X			X	X	X
	X	X		X	
X	X	X	X		
X	X	X	X		

D

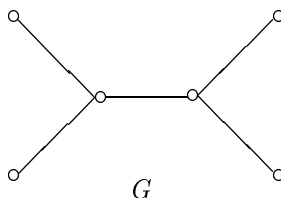
7.2.2001

1. Naj bo (p_1, p_2, \dots, p_n) poljubna permutacija množice \mathbb{N}_n , kjer je n liho število. Dokaži, da je produkt

$$(p_1 - 1)(p_2 - 2) \cdots (p_n - n)$$

sodo število.

2. V nekem mestu imamo p avtošol. Vsak izmed $p + n$ prijateljev se vpiše v eno avtošolo. Na koliko načinov lahko to naredijo, če je v vsako avtošolo vpisan vsaj eden izmed njih in sta p in n poljubni naravni števili?
3. Koliko je besed dolžine n nad abecedo $\{a, b\}$, ki ne vsebujejo dveh zaporednih a -jev?
4. Podan je graf G .



- a) Poišči ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa G pri njenem delovanju na točkah grafa.
- b) Na koliko načinov lahko točke grafa G pobarvamo s tremi barvami?

21.1.2002

1. Iz vrtnic, aster in lilij bi radi naredili šopek z devetimi cvetovi. Cvetov iste vrste med seboj ne razlikujemo. Koliko različnih šopkov lahko napravimo
 - a) če nimamo nobenih omejitev,
 - b) če mora posamezni šopek vsebovati vsaj en cvet vsake vrste?
2. $2n$ ljudi je imelo kosilo za okroglo mizo z označenimi stoli. Za isto mizo želijo tudi večerjati, vendar tako, da nihče ne sedi nasproti iste osebe, kot je sedel med kosilom. Pokaži, da je število vseh takšnih razporeditev enako

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{k!} \left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)^2 (2n-2k)! .$$

3. Poišči rodovno funkcijo za število razbitij množice z n elementi na dva neprazna razreda.
4. Na koliko načinov lahko na bela polja običajne šahovske deske velikosti 8×8 postavimo k , $k = 1, \dots, 8$, nenapadajočih se trdnjav?

4.2.2002

1. Skupina 40 turistov, med katerimi je 10 otrok s svojimi mamami, naleti na ozko brv čez potok, po kateri lahko gre naenkrat samo en človek. Nobena dva otroka si nista v sorodstvu. Na koliko načinov lahko prečkajo potok, če
 - a) je vseeno, kako se zvrstijo,
 - b) mora vsak otrok iti neposredno pred ali pa za svojo mamo,
 - c) mora določeni otrok iti pred svojo mamo (ne nujno neposredno pred njo)?

2. Reši rekurzijo

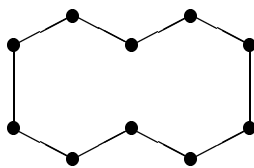
$$a_n - a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-3}),$$

če je $a_i = i$ za $i = 0, 1, 2$.

3. Z uporabo rodovne funkcije izrazi splošni člen rekurzivno podanega zaporedja

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n3^n, \quad a_0 = 1, a_1 = 2.$$

4. Molekula benzena ima obliko desetkotnika, kot je to razvidno s slike. V ogliščih so ogljikovi atomi in na vsakega lahko vezemo vodikov atom (H) ali metilni radikal (CH_3).



- a) Koliko različnih molekul dobimo ?
- b) Na koliko načinov lahko vezemo pet H-atomov in pet CH_3 -radikalov?

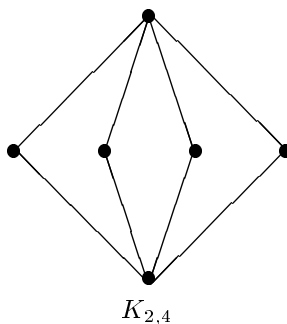
10.6.2002

1. Na prireditvi se za govorniškimi odrom zvrsti $m \geq 3$ žensk in $n \geq 2$ moških. Na koliko načinov se lahko razporedijo, če
 - a) se morajo govorniki istega spola zvrstiti eden za drugim,
 - b) Eva, Ana in Mira ne smejo imeti govora ena za drugo in enako velja za Jureta in Tadeja.
2. Reši rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 4^n$$

pri pogojih $a_0 = 1$ in $a_1 = 6$.

3. Poišči rodovno funkcijo in jo reši za število načinov izbire sodniške trojice za košarkaško tekmo, če imamo na voljo n sodnikov.
4. Na koliko neekvivalentnih načinov lahko z dvema barvama pobarvamo točke grafa $K_{2,4}$?



Kolokviji

1. kolokvij 2000-01

1. Koliko je besed dolžine 20 v naši abecedi, če
 - a) vsaka beseda vsebuje 14 soglasnikov in nikdar dva samoglasnika ne stojita skupaj,
 - b) se začne s soglasnikom in je med dvema soglasnikoma vedno en samoglasnik ter se pojavi vseh 5 samoglasnikov?
2. Naj bosta m, n naravni števili, pri čemer je $m \geq n$. Koliko je najkrajših poti po celoštevilski mreži od izhodišča do točke (m, n) , če poti izgledajo kot stopnice različnih širin, katerih višina je 1?

3. Koliko je različnih sumandov v razvoju izraza

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n.$$

4. Na večerjo je povabljenih n poročenih parov in posedejo se za okroglo mizo z $2n$ stoli, ki so označeni. Na koliko načinov se lahko posedejo za mizo tako, da noben poročen par ne sedi skupaj?

1. kolokvij 2001-02

1. Morsova abeceda je način kodiranja s pikami in črticami, kjer so lahko kodirani nizi različnih dolžin. Kolikšna vsaj mora biti dolžina niza, če želimo zakodirati vsa petmestna števila, ki
 - a) so sestavljena iz različnih števk,
 - b) ne vsebujejo števka 0, 4 ali 7?
2. Na koliko načinov lahko izberemo črno in belo polje na $n \times n$ šahovnici tako, da izbrani polji ne bosta pripadali niti isti vrstici niti istemu stolpcu, če je n sodo število?
3. Na koliko načinov lahko n različnih bombonov razdelimo šestim otrokom tako, da natanko dva ne dobita nobenega?
4. Dokaži identiteto:

a)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq n_i \leq n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

če mora biti $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$,

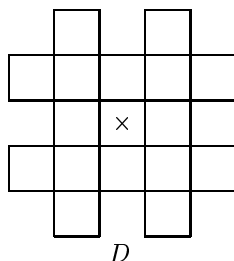
b)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4},$$

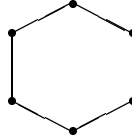
če je $n \geq 4$.

2. kolokvij 2000-01

- Iz črk a, b in c sestavljamo besede. Naj bo a_n , $n \geq 1$, število vseh takšnih n mestnih besed, v katerih ni zaporednih b-jev ali c-jev in obenem ni v besedi podzaporedja cb.
 - Določi a_1, a_2, a_3 .
 - Poišči rekurzivno formulo za a_n .
- Na koliko načinov lahko 3000 enakih pisemskih ovojníc razdelimo, v paketih po 25, med štiri skupine študentov tako, da dobi vsaka skupina vsaj 150 in ne več kot 1000 pisemskih ovojníc?
- Določi trdnjavski polinom za desko D .



- Molekulo benzena lahko z grafom predstavimo kot pravilen šestkotnik, katerega oglišča so ogljikovi atomi. Benzen nitriramo tako, da na vsak ogljikov atom vežemo kvečjemu eno NO_2 skupino, nastale molekule pa imenujemo nitrotolueni. Koliko različnih nitrotoluenov lahko dobimo s postopkom nitriranja? (Na sliki je grafični prikaz molekule benzena).

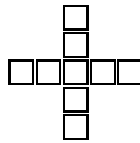


2. kolokvij 2001-02

1. Zaporedje a_n je rekurzivno podano kot $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \geq 1$, $a_0 = 2$.
 - a) Poišči rodovno funkcijo $G(x)$ zaporedja a_n in eksplicitno izrazi koeficient pred x^n v $G(x)$.
 - b) S pomočjo rodovne funkcije zaporedja a_n poišči rodovni funkciji zaporedij $b_n = 3a_n$ in $c_n = a_{n+4}$.
2. Koliko permutacij π množice $\{1, 2, \dots, 10\}$ ima lastnost $|\pi(x) - x| \neq 3$ za vsak x iz $\{1, 2, \dots, 10\}$?
3. Linearna koda \mathcal{C} je določena z nadzorno matriko

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Določi parametre in kodne besede linearne kode \mathcal{C} .
 - b) Ob predpostavki, da je pri prenosu prišlo do ene napake, popravi kodni besedi 1100011 in 1000000.
4. Mlin na veter je sestavljen iz kvadratnih ploščic, kot je to razvidno s slike.



- a) Na koliko različnih načinov lahko ploščice pobarvamo z modro in rdečo barvo?
- b) Koliko je barvanj z natanko tremi modrimi ploščicami?