

## Vaje 8: Integral

Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Funkcijo  $F$ , za katero je  $F'(x) = f(x)$  za vsak  $x \in D$  imenujemo **nedoločeni integral** funkcije  $f$  in označimo  $F(x) = \int f(x)dx$ .

Naj imata funkciji  $f$  in  $g$  nedoločena integrala. Potem veljata naslednji lastnosti:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx.$$

**Uvedba nove spremenljivke.** Naj ima funkcija  $f$  nedoločeni integral in naj bo  $g$  odvedljiva funkcija. Potem ima nedoločeni integral tudi funkcija  $h(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$  in velja:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

**Integracija po delih.** Če obstaja eden od integralov  $\int f(x)g'(x)dx$  in  $\int g(x)f'(x)dx$ , obstaja tudi drugi in velja

$$\int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x).$$

Naj bo  $F(x)$  nedoločeni integral funkcije  $f(x)$ . Potem **določeni integral**  $\int_a^b f(x)dx$  izračunamo takole:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Trditev.** Ploščino lika med grafoma zveznih funkcij  $f$  in  $g$  na intervalu  $[a, b]$  je enaka

$$\int_a^b |g(x) - f(x)|dx.$$

## Naloge na vajah

1. Izračunajte naslednje nedoločene integrale:

(a)  $\int dx$

(b)  $\int (x^3 + 3 - x^{-2}) dx$

(c)  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{4x}) dx$

(d)  $\int (13^x + e^x + 13) dx$

(e)  $\int (\sin(2x) + \cos(2x)) dx$

(f)  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

(g)  $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

(h)  $\int x \ln(x^2 + 1) dx$

(i)  $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

(j)  $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

(k)  $\int \tan x dx$

(l)  $\int \sin^6 x \cos x dx$

(m)  $\int x\sqrt{x-2} dx$

(n)  $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx$

(o)  $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

(p)  $\int x \sin \frac{x}{2} dx$

(q)  $\int x^2 \cos x dx$

(r)  $\int \ln x dx$

$$(s) \int x \arctan x^2 dx$$

$$(t) \int \cos 5x \cos 2x dx$$

2. Izračunajte ploščino lika, omejenega z:  $y = 3$ ,  $y = -x + 3$ ,  $y = 2x - 6$
3. Izračunajte ploščino lika, omejenega z osjo  $y$ , parabolo  $y = -x^2 + 3x + 4$  ter tangento na parabolo v točki z absciso 2.
4. Izračunajte ploščino lika, omejenega z grafoma funkcij  $f(x) = x^2$  in  $g(x) = 2 - x^2$ .
5. Izračunajte ploščino lika, omejenega z grafoma funkcij  $f(x) = -2x + 7$  in  $g(x) = \sqrt{2x - 1}$  ter osjo  $x$ .
6. Izračunajte ploščino lika, omejenega s krivuljama  $y = 2x - x^2$  in  $x + y = 0$