1 Naključne spremenljivke

- Naj bo $(G, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ verjetnostni prostor. Funkcija $X : G \to \mathbb{R}$ je naključna spremenljivka, če je za vsako Borelovo množico B v $\mathbb{R}$ njena praslika $X^{-1}(B) = \{e \in G;\ X(e) \in B\}$ element σ-algebre $\mathcal{A}$. Oz. če za vsak interval $(-\infty, a)$ velja $X^{-1}((-\infty, a)) = \{e \in G;\ X(e) < a\} \in \mathcal{A}$.
- $P_X(B) = P[X \in B] = P(X^{-1}(B))$.
- X naključna spremenljivka na G. Porazdelitvena funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ naključne spremenljivke X je definirana s predpisom $F_X(x) = P[X < x]$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
- $P[X = a] = \lim_{x \downarrow a} F_X(x) - F_X(a)$.
- Porazdelitvena funkcija F_X je zvezna v točki a natanko tedaj, ko je $P[X = a] = 0$.
- Matematično upanje (pričakovana vrednost) $E(X) = \sum_k x_k p_x$: je število, proti kateremu limitira povprečna vrednost X, ko število poskusov narašča proti neskončnosti.
- Disperzija $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ je mera razpršenosti vrednosti spremenljivke X.

1.1 Diskretne naključne spremenljivke

- Naključna spremenljivka X je diskretna, če je njena zaloga vrednosti števna množica.
- Naj bo Z_X zaloga vrednosti naključne spremenljivke X in označimo $p_k = P[X = x_k]$ za vsak k. Potem je $\sum_k p_k = 1$.
- Porazdelitev naključne diskretne spremenljivke je običajno podana z verjetnostno funkcijo:
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$
- $P[X \in A] = \sum_{x_k \in A} p_k$.
- $F_X(x) = \sum_{x_k < x} p_k$ je za vsak $x \in \mathbb{R}$ stopničasta funkcija, ki ima v posamezni točki x_k skok velikosti p_k.
- Indikator dogodka A je naključna spremenljivka I_A, ki zavzame vrednost 1, če se dogodek A zgodi in zavzame vrednost 0, če se A ne zgodi.

- Enekomerna diskretna porazdelitev $E(n)$. Naključna spremenljivka X je enakomerno porazdeljena na množici $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, če je $p_k = P[X = x_k] = \frac{1}{n}$.

- Binomska porazdelitev $B(n,p)$. Naj bo $P(A) = p$ in $P(\overline{A}) = q = 1-p$. Poskus neodvisno izvedemo n-krat in dobimo Bernoulijevo zaporedje $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kjer je spremenljivka X_k indikator dogodka A v k-ti realizaciji poskusa. Zanima nas frekvenca dogodka A, ki je vsota indikatorjev: $S_n = X_1 + \ldots + X_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$. V tem primeru je $P[S_n = k] = p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

- Poissonova porazdelitev $P(\lambda)$. Zaloga vrednosti Poissonove naključne spremenljivke je množica $\mathbb{N}_0$, verjetnostna funkcija pa $p_k = P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$.

- Geometrijska porazdelitev $G(p)$. Naj bo $P(A) = p$. Poskus neodvisno ponavljamo tako dolgo, dokler se ne zgodi A. Število realizacij poskusa je naključna spremenljivka X, katere zaloga vrednosti je množica $\mathbb{N}$. X ima verjetnostno funkcijo $p_k = P[X = k] = pq^{k-1}$.

- Pascalova porazdelitev $P(m,p)$. Njena zaloga vrednosti je $\{m, m+1, \ldots\}$, verjetnostna funkcija pa $p_k = P[X = k] = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$, za $k = m, m+1, \ldots$. Tako je porazdeljeno število neodvisnih ponovitev poskusa, potrebnih, da se A zgodi natanko m-krat.

1.2 Naloge

1. Naj bo X število padlih pik na igralni kocki. Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke X ter izračunaj matemetično upanje spremenljivke X.

2. Kovanec, keterega verjetnost, da pade grb je p, mečemo, dokler se prvič ne pojavi grb. Število metov potrebnih za to je X.

   (a) X predstavi z verjetnostno funkcijo.

   (b) Zapiši porazdelitveno funkcijo.

   (c) Izračunaj metematično upanje.

   (d) Poimenuj porazdelitev.

3. Verjetnost, da pade grb je p. Vržemo 5 kovancev. Število grbov je slučajna spremenljivka X. Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo, izračunaj matematično upanje in poimenuj porazdelitev.

4. Mečemo dve pošteni igralni kocki. Naj bo X maksimalno število pik na obeh kockah. Zapiši verjetnostno in porazdelitveno funkcijo, izračunaj matematično upanje in disperzijo.

5. Naj bo $P(X = n) = \frac{c}{n^2}$, za $n \in \mathbb{N}$. Določi c tako, da bo F_X porazdelitvena funkcija. Izračunaj še matematično upanje in disperzijo.

6. Naj bo X porazdeljena z verjetnostno funkcijo $P[X = n] = c(\frac{a}{a+1})^n$, za $n \in \mathbb{N}_0$ in $a > 0$. Izračunaj c. Naj bo $Y \equiv X (\mathrm{mod}\ 3)$. Kako je porazdeljen Y?

7. Kadilec pipe ima dve škatlici vžigalic, v vsakem žepu eno in v vsaki škatlici je na začetku n vžigalic. Vedno, ko kadilec prižge pipo, naključno izbere škatlico in iz nje vzame vžigalico. Kolikšna je verjetnost, da je v drugi škatlici še $k = 0, 1, \ldots, n$ vžigalic, ko opazi, da je prva škatlica prazna?

8. Božiček je izgubil seznam za 4 otroke, zato darila deli naključno. Naključna spremenljivka pove število daril na pravem naslovu. Izračunaj $E(X)$.

9. Pošteno igralno kocko mečemo tako dolgo, da zberemo vsaj 5 pik. Kakšna je porazdelitev potrebnega števila metov? Kakšna je verjetnost dogodka, da v poslednjem potrebnem metu vržemo vsaj dve piki?

10. Slučajna spremenljivka X je diskretna in velja $P[X = k] = \frac{a}{k^3-k}$, $k = 2, 3, 4, \ldots$ Določi konstanto a.

1.3 Zvezne naključne spremenljivke

1.4 Naloge

1. Slučajna spremenljivka X naj meri oddaljenost od stranice kvadrata $[0,2] \times [0,2]$. Zapiši porazdelitveno funkcijo in gostoto.

2. Palico dolžine 2 prelomimo. Oba kosa palice sestavljata sosednji stranici pravokotnika. X meri ploščino pravokotnika.

   (a) Kako je porazdeljen X?

   (b) Izračunaj $P(X < \frac{2}{3}p_{max})$.

   (c) Izračunaj povprečno ploščino pravokotnika.

3. Izračunaj a tako, da bo $F_X(x) = \frac{a}{1+e^{-x}}$ porazdelitvena funkcija. Izračunaj $P[0 < X < 1]$.

4. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto p_X. Kako je porazdeljena Y, ki je definirana kot $Y = e^X$. Zapiši še p_Y.

5. Določi a tako, da bo $p(x) = a|x|^3 e^{-x^2}$ gostota slučajne spremenljivke X. Naj bo $Y = X^2$. Določi $p_Y(y)$ in izračunaj $P(Y \geq 1)$.

6. Določi zvezo med a in b, da bo

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-b^2 x} & \text{če } x \geq 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

   gostota naključne spremenljivke X. Izračunaj k-ti začetni moment Z_k, $E(X)$ in $D(X)$. Naj bo $Y = 3X + 1$. Izračunaj $E(Y), D(Y)$.

7. Naj bo zvezna slučajna spremenljivka podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} kx & \text{če } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

   Izračunaj k da bo p res gostota. Izračunaj vse tri kvartile in interkvartilni razmik.

8. Naj bo X porazdeljena Cauchijevo, to je $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Naj bo $Y = \min\{1, |X|\}$. Zapiši porazdelitveno funkcijo in gostoto naključne spremenljivke Y.

9. Naključna spremenljivka X meri pulz odraslega človeka. Porazdeljena je $X \sim N(65, 5)$. Kolikšna je verjetnost, da pri naključni izbiri človeka dobimo nekoga s pulzom med 60 in 90 in nekoga s pulzom več kot 70?

10. Privzeti smemo, da je povprečna višina 170 cm, standardni odklon pa 10 cm. Kolikšna je verjetnost

    (a) $P[X > 180]$?

    (b) $P[160 < X < 200]$?

11. Po podatkih naj bi bilo pri nas 3% strupenih kač. Izračunaj verjetnost, da med 200 izbranimi kačami ne dobimo več kot 4 strupene kače.

12. Skupina 400 strelcev strelja na tarčo. Verjetnost posameznega zadetka je $0,8$. Kolikšna je verjetnost

    (a) da je v trači vsaj 120 zadetkov?

    (b) da je v tarči največ 150 zadetkov?

    (c) da je v tarči med 310 in 330 zadetkov?

13. Kocko vržemo 6000 krat. V katerih mejah glede na povprečje lahko z verjetnostjo 0,95 pričakujemo število padlih šestic?

14. Kolikokrat je potrebno vreči pošten igralni kovanec, da bo verjetnost dogodka, da se relativna frekvenca grba razlikuje od $\frac{1}{2}$ za manj kot $0,05$ večja od $0,997$?

15. Naj bo realno število $a > 0$ in X naključna spremenljivka z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}ae^{-a|x|}$. Določi konstanto a, izračunaj $E(X), D(X)$. Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = e^X$?

2 Dodatne naloge

1. Naj bo $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ funkcija podana s predpisom $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$. Na intervalu $[0,3]$ naključno izberemo točko X. S pomočjo točke X sestavimo pravokotnik, tako da za stranico a izberemo razdaljo med izhodiščem in točko X, za stranico b pa razdaljo med točko X in njeno funkcijsko vrednostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina takšnega pravokotnika manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega pravokotnika.

2. Na voljo imamo kovanca tipa K_1 in K_2, katerih verjetnost, da pade grb je p_1 in p_2.

    (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb je 0.5, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{11}{12}$. Izračunaj p_1, p_2.

(b) Istočasno vržemo 3 kovance tipa K_1 in dva kovanca tipa K_2. Izračunaj verjetnost, da so padli trije grbi in dve cifri, če vemo, da sta padla vsaj en grb in vsaj ena cifra.

3. Diskretna slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena po zakonu $P(X = k) = \frac{aq^k}{k}$, kjer $k \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$. Izračunaj a ter $E(X)$ in $D(X)$.

4. Naj bo X zvezna, nenegativna slučajna spremenljivka z gostoto $p(x) = 2xe^{-x^2}$ (za $x \geq 0$, sicer je gostota 0). Izračunaj modus, mediano in povprečno vrednost te spremenljivke.