

1 Diskretni naključni vektorji

1. Dopolni tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni.

$X Y$	0	1	2	
-1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	x	x
0	$\frac{1}{10}$	x	x	x
1	$\frac{1}{20}$	x	x	x
	x	x	x	1

Določi še spremenljivko Z , ki je definirana kot $Z = Y - X$.

2. Hkrati vržemo tri poštene igralne kocke. Naj bo X minimalno število padlih pik in Y vsota padlih pik.

- Zapiši verjetnostno tabelo.
- Izračunaj robni porazdelitvi X in Y .
- Ali sta X in Y neodvisni?

3. Iz posode v kateri so tri rdeče, dve modri in pet belih kroglic na slepo izvlečemo tri kroglice hkrati. Slučajna spremenljivka X naj bo število rdečih kroglic, ki smo jih pri tem dobili, Y pa število modrih kroglic, ki smo jih izvlekli. Zapiši verjetnostno funkcijo slučajnega vektorja (X, Y) in določi robni porazdelitvi. Ali sta X in Y neodvisni? Določi še porazdelitveno funkcijo $Z = X + Y$.

4. V posodi imamo i rdečih kroglic s številko i ($i \in \{1, 2\}$), j zelenih kroglic s številko j ($j \in \{1, 2, 3\}$) in k modrih kroglic s številko k ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$). Slučajni vektor (X, Y) pomeni barvo in številko naključno izbrane kroglice. Določi verjetnostno funkcijo slučajnega vektorja (X, Y) in izračunaj verjetnost dogodka $[Y = n]$ pri pogoju, da je kroglica rdeča in je $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

5. Slučajni vektor je enakomerno porazdeljen na množici $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. Preveri, da so X, Y, Z paroma neodvisne in niso v celoti neodvisne.

2 Zvezni naključni vektorji

1. Naj bo zvezni slučajni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{če } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Kakšni sta robni porazdelitvi? Ali sta X in Y neodvisni? Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Z = \max\{X, Y\}$?

2. Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$ in naj bo

$$p(x, y) = \begin{cases} cx^n(y-x)^m e^{-y} & \text{če } 0 < x < y \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi c tako, da bo $p(x, y)$ gostota naključnega vektorja (X, Y) in izračunaj gostoto naključne spremenljivke $Z = Y - X$.

3. Naj bo naključni vektor (X, Y) porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x^2+y^2)^2} & \text{če } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi c tako, da bo p res gostota. Izračunaj porazdelitveno funkcijo in gostoto naključnega vektorja (U, V) , kjer je $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $V = \sqrt{\frac{Y}{X}}$. Ali sta U in V neodvisni?

3 Pogojne porazdelitve

1. Naj bo (X, Y) naključni vektor, $Z_X = Z_Y = \{1, 2, 3\}$, $p_{ij} = c(1 + i \cdot j)$. Določi c in verjetnostno funkcijo naključnega vektorja (X, Y) . Določi robni porazdelitvi. Ali sta spremenljivki neodvisni? Določi pogojno verjetnostno funkcijo spremenljivke X glede na Y in matematično upanje spremenljivke X pri pogoju $Y = 1$.

2. Naj bo X zvezna naključna spremenljivka podana z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Naj bo $A = \{x; |x| \leq 1\}$ in $Z_X = \mathbb{R}$. Kako je porazdeljena $X|A$?

3. Naj bo (X, Y) zvezni naključni vektor z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x^2y + 3xy^2 & \text{če } x, y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunaj $P(\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2})$.

4. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & \text{če } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_{X|Y=\frac{1}{2}}$.

5. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{če } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi konstanto c in $p_{X|Y}(x)$. Izračunaj regresijo $f(y) = E(X|Y)$.

6. Naj bo (X, Y) zvezni naključni vektor z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{če } |x - 1| + |y - 1| \leq 1. \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunaj $f(y) = E(X|Y)$.

7. Naj bo (X, Y) enakomerno porazdeljen na krožnem izseku s polmerom R in kotom α . Naj D meri razdaljo točke $T(x, y)$ do vrha krožnega izseka. Določi $p_{D|\Phi=\varphi_0}(r)$. Izračunaj $E(D|\Phi) = f(\varphi)$.

8. Naj bo (X, Y) mešanega tipa, kjer $P(X = k) = \frac{a}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$, $Y|X$ je porazdeljen z gostoto

$$p_{Y|X}(y) = \begin{cases} bx(1-y)^{x-1} & \text{če } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi a in b , $p(x, y)$ in izračunaj robno porazdelitev p_Y .

9. Dan je romb $ABCD$ z osnovno stranico a in kotom $\varphi = \angle BAD$. Določi pričakovano vrednost ploščine romba, če sta kot Φ in osnovnica X neodvisni naključni spremenljivki, ki sta enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, \pi]$ oziroma $[0, L]$.
10. V posodi je N kroglic, od tega je M belih, ostale so črne. Naenkrat naključno izberemo n kroglic in z X označimo število belih kroglic med njimi. Kako je porazdeljena naključna spremenljivka X ? Zapiši pričakovano število izbranih belih kroglic.
11. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x^2y^2 + xy) & \text{če } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi konstanto c in izračunaj $P(0 \leq Y \leq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2})$. Poišči regresijsko krivuljo $f(x) = E(Y|X)$.

3.1 Zveza med matematičnim upanjem in pogojnim matematičnim upanjem

1. Imamo $2n$ strojev, ki so postavljeni v oglišča pravilnega $2n$ kotnika. V vsakem trenutku je enako verjetno, da se pokvari poljubni stroj. Delavec jih oskrbuje po pravilu, da je tisti stroj, ki se prej pokvari, tudi prej na vrsti za popravilo. Pri tem se delavec giblje po obodu $2n$ kotnika po najkrajši poti.
 - (a) Kolikšno povprečno pot delavec pri tem opravi?
 - (b) Ali bi bilo bolj ekonomično, da bi se delavec po vsakem popravilu stroja vrnil v središče $2n$ kotnika?
2. Pri igri s tremi zaporednimi polji igralec meče pošten igralni kovanec. Grb igralcu omogoča, da se premakne za eno polje, cifra pa da eno polje preskoči. Na enem izmed polj je skrita past. Če igralec prebrodi vsa tri polja dobi 10 EUR, če stopi na past dobi 5 EUR. Kolikšen je pričakovan dobitek pri tej igri?
3. Naj bosta $X \sim N(a, \sigma)$ in $Y \sim N(b, \tau)$. Določi gostoto pogojne porazdelitve $Y|X$. Izračunaj $E(Y|X)$.