

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
1.12.2005

1. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe

$$z^5 + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{10}$$

in jih predstavi v kompleksni ravnini.

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

Zapiši enačbo tiste tangente na graf funkcije f , ki ima največji smerni koeficient.

3. Izračunaj integrala:

a) $\int \arcsin x \, dx$

b) $\int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \, dx.$

4. Naj bo $a > 0$. Ugotovi, ali konvergirata vrsti:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n(n+a)} - n)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}).$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj tudi njeno vsoto.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
26.1.2006

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n velja:

$$3^n > (n + 1) 2^{n-1} .$$

2. Izračunaj limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + \sqrt{x}}{(1 + x^2)^2} \right)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x^2)}{x^2} .$$

3. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)} .$$

- a) Upoštevaj pomen prvega odvoda in skiciraj graf funkcije f .
b) Izračunaj določeni integral:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(x) dx .$$

4. Dana je potenčna vrsta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n - 1}{2^{n+1}} x^n .$$

Določi konvergenčno območje podane vrste in izračunaj njeno vsoto.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
9.2.2006

1. Dani sta funkciji:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; x < -1 \\ \frac{\arctg x}{x^2 + 1} & ; -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & ; x > 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0. \end{cases}$$

Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$.

2. Določi oglišča tistega pravokotnika, ki je včrtan v elipso z enačbo $4x^2 + y^2 = 8$ in ima največjo ploščino. Pri tem upoštevaj, da ima pravokotnik z največjo ploščino stranice vzporedne s koordinatnima osema.

3. Izračunaj integrala:

a) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

b) $\int \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

4. Ugotovi, ali konvergirata vrsti:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n! - 1}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{(n-1)n}$.

Če katera od vrst konvergira, izračunaj tudi njeno vsoto.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
20.4.2006

1. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom:

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Dokaži, da je zaporedje (a_n) monotono in omejeno ter izračunaj njegovo limito.

2. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje skiciraj graf funkcije:

$$f(x) = e^{x^{-2}} - 1.$$

3. Izračunaj integrala:

a) $\int \frac{x}{3^x} dx$

b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}.$

4. Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke 0 in določi $f^{(2006)}(0)$.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
15.6.2006

1. Funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sta podani z naslednjima predpisoma:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \quad \text{in} \quad g(x) = \ln(1-x).$$

Zapiši predpis za funkcijo $f \circ g$ in določi njeno definicijsko območje.

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom: $f(x) = e^x$.

a) Izračunaj limito: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2}{1 - \cos x}$.

- b) Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo tangenta na graf funkcije f v točki $(0, 1)$ hkrati tudi normala na graf funkcije $g(x) = a + \frac{1}{2x^2}$ v neki točki.

3. Parabola $y^2 = 6x$ razdeli krog $x^2 + y^2 \leq 16$ na dva lika. Izračunaj ploščini teh dveh likov.

4. Ugotovi, ali konvergirata vrsti:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj tudi njeno vsoto.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
29.6.2006

1. Poišči vsa kompleksna števila z , ki zadoščajo enačbi:

$$\operatorname{Re}(z) + z^2 = z\bar{z} + 32i.$$

2. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje skiciraj graf funkcije:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1-x}{1+x} \right).$$

3. Izračunaj integrala:

a) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

b) $\int \frac{1 - \ln x}{x^2} dx.$

4. Ugotovi, ali konvergirata vrsti:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{n 3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3 + 1}.$

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
24.8.2006

1. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je število $3^{2n-1} + 1$ deljivo s 4 za vsako naravno število n .
2. Določi realni števili a in b tako, da bo imela funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{a - b \cos x},$$

v točki $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$ lokalni ekstrem.

3. Izračunaj integrala:

a) $\int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

4. Razvij funkcijo $f(x) = \ln(1 - 2x - 3x^2)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke 0 in s pomočjo dobljenega rezultata izračunaj vsoto vrste:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 3^n}{n 4^n}.$$

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
7.9.2006

1. Določi definicijsko območje funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{x \ln(2x-x^2)}.$$

2. Izračunaj limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4+1} - x^2)$

b) $\lim_{x \downarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{2}{\ln x}}$.

3. Krivuljo $y = \sin x$ za $x \in [0, \pi]$ zavrtimo okoli abscisne osi in dobimo rotacijsko ploskev P . Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki ga omejuje ploskev P .

4. Dokaži, da vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ konvergira in izračunaj njeno vsoto.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika in...
Fizika

Pisni del izpita pri predmetu OSNOVE ANALIZE
14.9.2006

1. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} & ; x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ \frac{b \sin(x - 1)}{\sqrt{x} - 1} & ; x > 1 \end{cases} .$$

Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija f zvezna v točki $x = 1$.

2. Izračunaj integrala:

a) $\int \frac{x}{e^{2x}} dx$

b) $\int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} \frac{2 \sin(\ln x)}{x \cos^3(\ln x)} dx$.

3. Dve oglišči pravokotnika ležita na krivulji z enačbo $y = \frac{1}{x^2+1}$, preostali dve pa na premici $y = 0$. Določi oglišča pravokotnika tako, da bo njegova ploščina največja.

4. Izračunaj vsoti vrst:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{10^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-2)^n}{2^n n!}$.

Naloge so enakovredne.
Čas reševanja je 120 minut.