

LIMITA IN ZVEZNOST FUNKCIJE

1. S pomočjo definicije limite dokaži, da je:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}.$$

2. Izračunaj naslednje limite:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{3 - \sqrt{x+3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - \sqrt[3]{12-x^2}}{x-2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{102} + x^{12} - 4x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$

3. Izračunaj naslednje limite (s pomočjo znanih limit):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad a, b > 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(n(\pi-x))}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}, n \in \mathbb{N}$

f) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1-x) - \ln(1+x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$

4. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ ter f in g funkciji, za kateri obstajata limiti $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Dokaži, da v primeru, ko je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, velja:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

5. Izračunaj naslednje limite:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x}{\sin(3x)} \right)^{\frac{1}{x+2}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\operatorname{ctg} x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)}. \end{array}$$

6. S pomočjo definicije limite dokaži, da je:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

7. Izračunaj naslednje limite:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{3x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4} \right)^{x(2^{\frac{1}{x}}-1)(2^x+4)}. \end{array}$$

8. S pomočjo definicije zveznosti dokaži, da je funkcija $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ zvezna v točki $x = 2$.

9. Ugotovi, ali obstajata naslednji limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

10. Ugotovi, ali lahko določimo $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 0$, če je:

- a) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$,
- b) $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$,
- c) $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

11. Poišči točke nezveznosti naslednjih funkcij:

- a) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$,
- b) $f(x) = x \ln \sin^2 x$,
- c) $f(x) = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$,
- d) $f(x) = \begin{cases} e^x & ; x \leq 0 \\ x - 1 & ; 0 < x \leq 1 \\ \ln x & ; x > 1 \end{cases}$.

12. Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna:

- a) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & ; -2 < x \leq -1 \\ 4 - ax^3 & ; x > -1 \end{cases}$,
- b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$.

13. Določi števili $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{x-1} & ; x < -1 \\ bx - 2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & ; x > 1 \end{cases}.$$

14. Določi $p(x) = ax^2 + bx + c$ tako, da bo funkcija f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x < -1 \\ p(x) & ; -1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} & ; x > 3 \end{cases}$$

zvezna in $p(0) = 0$.